N° d'ordre : 273 Année 1974

THESE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD – LYON

pour obtenir

le grade de DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

André BATBEDAT

PRÉMODULES, PRÉALGEBRES ET LEUR CONTEXTE AFFINÉ

Soutenue le 23 Octobre 1974 devant la Commission d'Examen.

JURY : MM. J. BRACONNIER Président

M. GUILLAUME
P. JANIN
Y. KERBRAT
} Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544715_0003

N° d'ordre : 273 Année 1974

THESE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD – LYON

pour obtenir

le grade de DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

André BATBEDAT

PRÉMODULES, PRÉALGEBRES ET LEUR CONTEXTE AFFINÉ

Soutenue le 23 Octobre 1974 devant la Commission d'Examen.

JURY : MM. J. BRACONNIER — Président

M. GUILLAUME
P. JANIN
Y. KERBRAT
} Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE CLAUDE-BERNARD - LYON 1

Président : Mr le Pr J. BOIDIN

Premier Vice-Président : Mr le Pr R. TOURAINE

Deuxième Vice-Président : Mr P. PONCET, Maître-assistant

Troisième Vice-Président : Mr C. BADOR, étudiant

Secrétaire Général de l'Université : Mr J. RAMBAUD, administrateur civil

Unités d'Enseignement et de Recherche (U.E.R)

U.E.R médicale GRANGE-BLANCHE : Mr le Pr D. GERMAIN

U.E.R médicale ALEXIS-CARREL : Mr le Pr C. GIROD

U.E.R médicale LYON-NORD : Mr le Pr J.P GARIN

U.E.R médicale SUD-OUEST : Mr le Pr J. ROBERT

U.E.R des Sciences Pharmaceutiques : Mr le Pr M. CARRAZ

U.E.R des Techniques de Réadaptation : Mr A. MORGON, Maître de Conférences

U.E.R de Biologie Humaine : Mr le Pr J.C. CZYBA

U.E.R. d'Education Physique et Sportive : Mr A. MILLON, Professeur d'E.P.S

U.E.R des Sciences Odontologiques : Mr le Dr R. VINCENT

U.E.R de Mathématiques : Mr le Pr G. MAURY

U.E.R de Physique : Mr le Pr R. UZAN

U.E.R de Chimie et Biochimie : Mr le Pr J. HUET

U.E.R des Sciences de la Nature : Mr le Pr J. BRUN

U.E.R de Sciences Physiologiques : Mr R. FONTANGES, Maître de Conférences

U.E.R de Physique nucléaire : Mr le Pr A. SARAZIN

U.E.R de Mécanique : Mr le Pr J. MATHIEU

Observatoire de LYON : Mr le Pr J.H. BIGAY

I.U.T 1 : Mr le Pr B. POUYET

I.U.T 2 : Mr J. GALLET, Directeur E.N.S.A.M.

AVANT PROPOS

Monsieur BRACONNIER m'a fait l'honneur de présider mon Jury : je l'en remercie.
L'élaboration de ce travail s'est faite dans une ambiance agréable et efficace grâce au soutien permanent de Messieurs GUILLAUME et JANIN : je leur exprime ma profonde gratitude.
Je tiens à remercier Monsieur KERBRAT qui a bien voulu me proposer le deuxième sujet : Analyse de deux conjectures sur les transformations conformes d'une variété riemannienne compacte.

D'autre part je suis reconnaissant à mes collègues de Montpellier de l'aide qu'ils ont pu m'apporter.
Enfin, lors du Colloque International d'Oberwalfach de juillet 1973 : Grundlagen der Geometrie, mes entretiens avec Messieurs ANDRE, ARNOLD, DÜHL et SPERNER m'ont permis de mieux situer le chapitre VIII parmi les travaux antérieurs.

Etant donné une structure avec des éléments distingués, une démarche affine consiste à oublier certains éléments distingués. Ainsi une démarche affine apparaît comme une généralisation mais, loin d'appauvrir les structures étudiées, elle entraîne au contraire un enrichissement et un approfondissement de nombreuses notions classiques.

Notre travail se situe dans un contexte affine issu d'un modèle de géométrie avec des points, des droites, une relation de parallélisme pour les droites et suffisamment de translations, et notre démarche affine initiale est dans le prolongement de la démarche affine de Pierre Janin dans [JB] et [JP].

Ceclui-ci écrit dans [JB], à propos des treillis convexes d'un anneau booléen : "il apparaît vite que ces sous-structures conservent de nombreuses propriétés de l'anneau entier. On pouvait donc tenter d'en donner une définition algébrique intrinsèque et de généraliser la notion d'anneau booléen".
Ce contexte affine, qui éclaire bien des démarches affines ultérieures, mérite d'être précisé.
On sait que si $(B, \vee, ., ')$ est un treillis distributif complémenté pour lequel $\vee$ (resp. .,') est l'opération Sup (resp. Inf, Complément), $(B, +, .)$ est un anneau booléen pour $x + y = xy' \vee x'y$.
Un treillis convexe de B est une partie qui, pour tous ses x, y contient aussi l'intervalle $[xy, x \vee y]$. Un treillis convexe T de B n'est stable pour $+$ que s'il contient le plus petit élément de B ; par contre il est toujours stable pour le produit et pour la loi ternaire canonique :

$$x + y + z = xyz \vee xy'z' \vee yz'x' \vee zx'y' \quad .$$

De plus T est un treillis distributif relativement complémenté et si on remplace x', y', z' respectivement par x'', y'', z'' compléments de x, y, z relatifs à xyz et $x \vee y \vee z$, la loi ternaire demeure la même.
Ces constatations suggèrent deux recherches complémentaires l'une de l'autre :
*) Etudier les propriétés de la loi ternaire $x + y + z$ sur un anneau booléen.
*) Etudier les propriétés de la loi ternaire $xyz \vee xy''z'' \vee yz''x'' \vee zx''y''$ sur un treillis distributif relativement complémenté.
Il résulte de ces recherches (voir [JB]) que la structure de treillis distributif relativement complémenté correspond biunivoquement à une structure algébrique introduite par Pierre Janin sous le nom de préanneau booléen.

On peut résumer cette démarche affine en disant que son contexte affine concernait les anneaux booléens ; l'oubli du neutre et du zéro s'est fait en remplaçant la somme binaire par une opération ternaire convenable.

Il était naturel ensuite d'appliquer une méthode analogue au cas d'un anneau quelconque : c'est ainsi que Pierre Janin a défini et étudié (voir [JP]) la structure de préanneau.

On pouvait penser que l'adaptation aux modules des constructions précédentes serait très aisée ; en fait la présence de l'opérateur extérieur nécessite la mise en place de nouvelles opérations...

Dans la note aux Comptes-Rendus [2], nous avons présenté la structure de prémodule (II. 10), fruit d'une première recherche qùi essayait de concilier les propriétés de la loi ternaire sur un préanneau avec les axiomes habituels des modules. Mais un résultat essentiel de [2] est que tout prémodule possède une origine : ainsi cette construction n'a pas un caractère véritablement affine. L'existence de l'origine sur un Ω-prémodule T est due en partie au fait que l'anneau Ω agit directement sur T c'est-à-dire par une application de $T \times \Omega$ dans T ; la note [3] marque un progrès capital dans cette démarche affine car elle correspond à l'introduction de l'opération affine (III. 1), opération qui prend en compte une "action indirecte" de l'anneau Ω. Le lien avec la méthode précédente se fait en remarquant qu'une opération affine est une famille de lois ternaires indexées par Ω.
Ajoutons qu'à chaque espace affine classique on peut associer un ensemble avec une certaine opération affine ; alors les notions de sous-espace et de morphisme sont simples et maniables.

Pierre Janin écrit dans [JP] : "Pour donner un aspect universel au problème de l'immersion d'un préanneau dans un anneau, on est amené à introduire les notions de préalgèbre, ...".
Nous appelons Préalgèbre (X. 1) (en justifiant cette utilisation du même mot), un espace affine muni d'un produit distributif par rapport à l'opération affine ; avec cette caractérisation très simple et une autre tout aussi maniable, nous faisons deux sortes d'études :
*) Propriétés des algèbres qui s'étendent aux préalgèbres.
*) Propriétés particulières des préalgèbres.

Nous avons donné un aperçu de ces recherches dans la note [4].
Il est alors possible de revenir sur la notion de structure prémodulaire (XII. 1) en considérant une préalgèbre qui agit sur un espace affine : nous avons résumé ce travail dans la note [5].

Notre construction des espaces affines et des préalgèbres a nécessité des recherches importantes sur les binaires (IX) et les ternaires (I et II), concernant plus particulièrement :
*) La notion d'élément inversible indépendamment d'hypothèses d'associativité ou d'existence de neutres (les résultats sur ce sujet sont rassemblés dans la note [6]) .
*) Certaines formes d'associativité ou de commutativité.
*) Les binaires et les ternaires à involution.
*) Les ternaires à opérateur.
Des notions classiques en binaire peuvent donner lieu ou non, à des généralisations en n-aire, $n > 2$ et bien souvent une même notion s'étend sous des formes très variées... L'étude des binaires et des ternaires qui s'est imposée dans ce travail, a été facilitée par la familiarisation que nous ont procurées des recherches antérieures ou concomitantes sur les structures n-aires : nous citerons d'abord les catégories polyadiques [1] puis les références 2, 3 du Chapitre I et 1, 2 du Chapitre IX.

Comme nous l'avons montré, notre démarche affine basée sur l'opération affine est dans le prolongement de la démarche affine de Pierre Janin ; le chapitre II (resp. III) comporte pour les stricts groupes ternaires (resp. espaces affines) à opérateur, une démarche affine totalement différente : elle s'appuie sur les notions réciproques de lois pointées et de lois dilatées. Cette méthode permet par exemple de confondre un espace affine à opérateur avec un module à opérateur muni d'une certaine involution et d'une famille d'éléments distingués.

Ce travail comporte une troisième démarche affine différente des deux précédentes : elle s'appuie sur la notion de loi pondérée (VII) ; pour un espace affine la loi pondérée joue un rôle aussi important que l'opération affine (ce qui permet par exemple de donner une nouvelle caractérisation des préalgèbres). La loi pondérée a été présentée dans la note [7] sur la pondération ; cette notion de pondération provient bien entendu d'un modèle physique très classique mais sa portée mathématique est beaucoup plus générale : ainsi sur toute préalgèbre

il existe une famille de lois binaires déduites par la construction pondérée (X. 6) ; la plupart sont distributives par rapport à l'opération affine initiale, certaines sont associatives et commutatives lorsqu'il en est ainsi pour le produit initial ; comme exemple citons la disjonction qui a été systématiquement utilisée par Pierre Janin.

L'exposé que nous présentons ici commence par des généralités sur les ternaires (I) et les ternaires à opérateur (II), la structure essentielle étant, de notre point de vue, celle de contre groupe ternaire à opérateur ; ceci nous permet de situer des opérations utilisées dans toute la suite et d'en connaître leurs propriétés.

Les Chapitres III, IV, V et VI, concernent l'opération affine : III pose des définitions et en tire les principales conséquences, IV résoud un problème fondamental de plongement, V précise la notion de caractéristique (à la suite de quoi il est clair par exemple qu'un préanneau booléen est de caractéristique 2), enfin VI met l'accent sur les sous-espaces, noyaux et morphismes.

La loi pondérée est introduite en VII : c'est un outil puissant grâce auquel on obtient directement des propriétés importantes sur les espaces affines. En particulier nous étudions en détail divers aspects géométriques dont certains préparent la construction réciproque du chapitre suivant : des axiomes de géométrie à une structure algébrique associée. Ce chapitre VIII adapte la méthode d'Artin au cas général le plus naturel ; il possède une introduction très développée qui expose les motifs, les méthodes et les principaux résultats. Nous pensons pouvoir considérer que le problème de l'algébrisation naturelle de la géométrie classique est maintenant résolu pour ce qui concerne son aspect affine.

L'étude des préalgèbres (X et XI) est précédée du Chapitre IX sur les binaires (on y étudie des binaires inversibles et des binaires à involution) et suivie du Chapitre XII sur les structures prémodulaires (où l'on s'intéresse essentiellement aux plongements).

La classe des préalgèbres contenant un idempotent (XIII) possède des propriétés importantes de décomposition en produit au sens classique, ou, d'une manière plus générale, en produit couplé, quadruplé... Comme application on montre par exemple qu'un préanneau idempotent est le produit d'un préanneau booléen par un préanneau zéro-neutre.

Les préanneaux d'ordre n (XIV) contiennent presque toujours un idempotent ce qui permet de leur appliquer les résultats du Chapitre XIII. Nous avons étendu aux préanneaux d'ordre n des propriétés que nous avions déjà établies pour les

anneaux d'ordre n ou pour les p^m-anneaux (voir références de XIV) et nous avons situé dans ce contexte les m-préanneaux étudiés par Pierre Janin à la fin de [JP].

La conclusion présente des perspectives de recherche qui proviennent d'un problème soulevé en cours d'exposé ou de la possibilité de prolonger une théorie mais aussi, plus généralement, de la notion même de démarche affine.

Nous plaçons juste avant le sommaire une équivalence absolument fondamentale dans notre contexte : elle ramène l'étude des espaces affines classiques (et, en pointant, celle des modules) à celle d'une classe de préanneaux.

Références pour l'Introduction

Les références JB et JP seront utilisées dans tout ce travail :

JB : P. Janin : Une généralisation des structures booléennes. Thèse de Troisième Cycle, Faculté des Sciences, Lyon 1966.

JP : P. Janin : Préanneaux, Thèse de Doctorat, Faculté des Sciences, Lyon 1968.

Autres références :

1 : A. Batbedat : Catégories polyadiques.

Les chiffres suivants concernent des notes que nous avons présentée aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris :

2 : Une généralisation de la notion de module, t. 276, A-95 (Janvier 1973).

3 : Une généralisation de la notion d'espaces affine, t. 276, A-169 (Janvier 1973

4 : Préalgèbres, t. 276, A-783 (Mars 1973).

5 : Structures prémodulaires, t. 276, A-827 (Mars 1973).

6 : Sur la notion d'élément inversible dans un ensemble binaire ou dans un ensemble ternaire, t. 277, A-409 (Septembre 1973).

7 : Sur la pondération dans un espace affine ou une préalgèbre, t. 278, A-737 (Mars 1974).

I. 1

Définition : On appelle binaire (resp. ternaire) un ensemble E muni d'une loi de composition interne : $(a,b) \to ab$ (resp. $(a,b,c) \to abc$).

Un morphisme de binaire (resp. ternaire) est une application qui respecte la loi de composition.

Ce chapitre est consacré aux ternaires. Nous apporterons des compléments sur la théorie des binaires au Chapitre VII.

Soit D un ensemble muni d'une ou plusieurs lois binaires : on peut construire une loi ternaire : $a \top b \top c$ à l'aide des lois binaires initiales et définir un ternaire comme une partie E de D stable par : $a \top b \top c$.

Exemple 1 :
i) D est un demi-groupe binaire pour $(a,b) \to ab$ et E une partie stable pour $a \top b \top c = abc$.
ii) D est un treillis distributif pour $\wedge$ et $\vee$: $E = D$ est un ternaire pour $a \top b \top c = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$.
Ajoutons que le treillis D peut être obtenu par des axiomes portant uniquement sur la loi ternaire : $a \top b \top c$; on peut donc ici remplacer deux lois par une seule.

Une application d'un ensemble D dans lui-même est encore appelée loi unaire.
A partir d'un ensemble D muni de lois unaires et binaires on peut construire des ternaires...

Exemple 2 : D est un groupe binaire pour $(a,b) \to ab$. Une partie E de D stable pour : $a \top b \top c = ab^{-1}c$ est un ternaire.
Ce type de ternaire a été étudié initialement par R. Baer [1] (resp. par H. Prüfer [12] lorsque D est commutatif).

Réciproquement il est très important de pouvoir ramener une loi ternaire à des lois binaires et unaires. Dans [6] P.M. Cohn a montré que c'est toujours possible. Nous même dans [3], avons montré que toute loi ternaire peut se ramener à une loi binaire itérée.
En fait ces résultats ont surtout un intérêt théorique. Les exemples qui précèdent nous permettent de comprendre que dans la pratique l'essentiel est de pouvoir

préciser les propriétés des lois binaires et unaires en liaison avec les propriétés de la loi ternaire considérée.

I. 2

Soit E un ensemble (dans la suite les ensembles utilisés sont généralement non vides) : (E)$\mathscr{A}$ est le demi-groupe binaire des applications de E dans E pour la loi de composition des applications ; l'application identique $\mathcal{I}$ est le neutre de (E)$\mathscr{A}$.
Lorsque E est un ternaire on associe à chaque $(a,b) \in E^2$ les éléments i_{ab} de (E)$\mathscr{A}$, pour i parcourant $I = \{g,m,d\}$ et tels que :

$$g_{ab} : x \in E \rightarrow abx \in E$$

$$m_{ab} : x \in E \rightarrow axb \in E$$

$$d_{ab} : x \in E \rightarrow xab \in E \ .$$

Définition : Soit E un ternaire :

- $a \in E$ est tripotent si : $aaa = a$
- $a \in E$ est i-inversif s'il existe $b \in E$ pour lequel $bi_{aa} = a$.
- $z \in E$ est i-zéro si pour tout $(a,b) \in E^2$: $z.\, i_{ab} = z$
- $(a,b) \in E^2$ est i-neutre si $i_{ab} = \mathcal{I}$
- $(a,b) \in E^2$ est i-simplifiable (resp. i-dominant) si i_{ab} est injective (resp. surjective).
- E est i-commutatif si pour tout $(a,b) \in E^2$: $i_{ab} = i_{ba}$.

On appelle naturellement P la propriété i-P vraie pour tout $i \in I$. Lorsque tout $a \in E$ (resp. tout $(a,b) \in E^2$) vérifie une propriété Q, on dit que E vérifie Q.

On démontre facilement les propriétés suivantes :

Proposition : Soit E un ternaire :

i) Tout tripotent est inversif.

ii) Si z est i-zéro et z' est j-zéro avec $i \neq j$, alors $z = z'$.

iii) Si (a,b) est g-neutre et (b,c) est d-neutre alors $a = c$.
Si (a,b) est g-neutre et (a,c) est m-neutre alors $b = c$.
Si (a,c) est m-neutre et (b,c) est d-neutre alors $a = b$.

iv) E est i-zéro si et seulement si E est i-neutre.

.../...

v) Si E est fini les propriétés i-simplifiable et i-dominant sont équivalentes.

vi) E est i-simplifiable (resp. i-dominant) si et seulement si toute équation : $xi_{ab} = c$ admet au plus (resp. au moins) une solution.

vii) Si E est i et j-commutatif avec $i \neq j$ alors E est commutatif.

I. 3

Définition 1 : Soit E un ternaire et $a \in E$:

a est i-inversible à droite (resp. à gauche) s'il existe $b \in E$ tel que $i_{ab} = \mathcal{J}$ (resp. $i_{ba} = \mathcal{J}$).

b est alors i-inverse à droite (resp. à gauche) pour a.

On voit que dans un ternaire les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) (a,b) est i-neutre,

ii) a est i-inverse à gauche pour b,

iii) b est i-inverse à droite pour a.

Il résulte alors de I. 2 proposition iii) le :

Lemme : Soit E un ternaire et $a \in E$:

Si b est g-inverse à gauche et c est d-inverse à droite pour a, alors $b = c$.

Si b est g-inverse à droite et c est m-inverse à droite pour a, alors $b = c$.

Si b est d-inverse à gauche et c m-inverse à gauche pour a, alors $b = c$.

Définition 2 : Soit E un ternaire et $a \in E$:

a est inversible aux extrêmes s'il est à la fois g-inversible à gauche et d-inversible à droite,

$b \in E$ est inverse aux extrêmes pour a si pour tout $x \in E$:

$bax = xab = x$.

Proposition 1 : Dans un ternaire tout élément inversible aux extrêmes admet un unique inverse aux extrêmes.

Preuve : Première assertion du lemme.

Exemple 1 : Soit D un demi-groupe binaire, e neutre dans D et E le ternaire D pour la loi : $a \top b \top c = ac$. E est inversible aux extrêmes et pour tout a l'inverse aux extrêmes est e.

Définition 3 : Soit E un ternaire et $a \in E$:

a est inversible au milieu s'il est à la fois g-inversible à droite et d-inversible à gauche,

$b \in E$ est inverse au milieu pour a si pour tout $x \in E$: $abx = xba = x$.

Pour un élément inversible au milieu, et contrairement au cas précédent, ni l'existence ni l'unicité de l'inverse au milieu ne sont assurées.

Exemple 2 :

i) Soit D l'ensemble des nombres entiers positifs et $\times$ une loi binaire sur D vérifiant la table incomplète suivante :

	1	2	3	4 . . .	2m	2m+1 . . .
1	1	2	3	4 . . .	2m	2m+1 . . .
2		4	1			
3		6	3	1		
4		8	2			
.						
.						
.						
2m		4m	m			
2m+1		4m+2	3			
:						

On voit que : 1 est neutre à gauche ; pour tout $x \in D$: $x \times 2 = 2x$; $x \times 3$ est 3 si x est impair et $\frac{x}{2}$ si x est pair ; $3 \times 4 = 1$.

Considérons alors le ternaire D pour la loi :

$a \top b \top c = (a \times b) \times c$. Pour tout $x \in D$: $3 \top 4 \top x = x \top 2 \top 3 = x$, donc 3 est inversible au milieu. Cependant 2 est l'unique d-inverse à gauche car $x \top b \top 3 = x$ implique $b \times 3 = 1$ et donc $b = 2$; de plus 2 n'est pas g-inverse à droite car $3 \times 2 = 6$ n'est pas neutre à gauche (puisque $6 \times 2 = 12$). Ainsi 3 n'a pas d'inverse au milieu.

ii) Dans l'exemple 1 tout élément est inverse au milieu pour e.

Proposition 2 : Dans un ternaire inversible aux extrêmes tout élément d-inversible à gauche ou g-inversible à droite admet un inverse au milieu (non nécessairement unique).

Preuve : $x = xba$ pour tout x, équivaut à : $x = abx$ car a est l'inverse aux extrêmes pour b.

Définition 4 : Soit E un ternaire et $a \in E$:

a est i-inversible s'il l'est à gauche et à droite,

b est i-inverse pour a s'il l'est à gauche et à droite.

Exemple 3 : Soit E l'ensemble des entiers relatifs muni de la loi ternaire : $a \top b \top c = a + b + 2c$.

Tout élément est d-inversible à gauche.

Les nombres impairs ne sont pas d-inversibles à droite.

(-4) (resp. (-1)) est pour 2 l'unique d-inverse à gauche (resp. à droite).

I. 4

Soit E un ternaire et $a \in E$: on devrait dire que a est inversible lorsqu'il est i-inversible pour tout $i \in I$ (I. 2). En fait pour le ternaire de I. 1 exemple 2 tout élément est à la fois g et d-inversible, inversible aux extrêmes et au milieu mais il existe généralement des éléments non m-inversibles.

On voit que :

Lemme : Soit E un ternaire et $a \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) a est g et d-inversible,

ii) a est inversible aux extrêmes et au milieu.

Définition : Un élément a d'un ternaire E est inversible s'il vérifie les propriétés équivalentes de ce lemme

$b \in E$ est inverse pour a si pour tout $x \in E$:

$bax = abx = xab = xba = x$.

Proposition : Dans un ternaire il y a unicité pour l'inverse (éventuel) d'un élément inversible.

Preuve : I. 3 proposition 1.

Théorème 1 : Dans un ternaire inversible tout élément admet un unique inverse aux extrêmes et des inverses au milieu.

Preuve : I. 3 proposition 1 et 2.

Exemple : Soit D un groupe binaire, $\wedge$ une application surjective de D dans D et E le ternaire D pour la loi : $\hat{abc}$.
$\hat{a}^{-1}$ est l'inverse aux extrêmes pour a.
Tout élément b tel que $\hat{b} = a^{-1}$ est inverse au milieu pour a.

Théorème 2 : Soit un ternaire dans lequel tout élément possède un inverse.
Pour tout élément l'inverse aux extrêmes est l'unique inverse au milieu (et c'est l'unique inverse).

Preuve : Si b est inverse au milieu pour a alors a est inverse aux extrêmes pour b donc aussi inverse au milieu pour b et par conséquent b est l'inverse aux extrêmes pour a.

I. 5

Définition : Un demi-groupe ternaire est un ternaire qui vérifie :
(xyz)tu = x(yzt)u = xy(ztu) (associativité).

Proposition 1 : Pour un demi-groupe ternaire les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) m-simplifiable,
ii) g et d-simplifiable
iii) simplifiable.

Preuve : i) implique ii) : Si abx = aby alors abxcd = abycd d'où bxc = byc soit x = y.
ii) implique i) : Si axb = ayb alors caxbd = caybd d'où cax = cay soit x = y.

Soit E un demi-groupe ternaire et $(a,b) \in E^2$, d-neutre : dans [16] D. Zupnik, généralisant une méthode due à M. Hosszù [8], montre que la loi ternaire xyz peut s'écrire $x \times \hat{y} \times \hat{\hat{z}} \times c$ où $x \times y = xay$ est une loi binaire associative sur E, $\hat{x} = bxa$ et $c = bbb$.

Soit D un demi-groupe binaire pour la loi : ab et E' une partie de D sta-

ble pour la loi : $a \top b \top c = abc$: E' est un demi-groupe ternaire encore appelé sous-demi-groupe ternaire canonique (du demi-groupe ternaire canonique D).
Soit E un ternaire : E se plonge dans D s'il est isomorphe à un sous demi-groupe ternaire canonique de D.

Proposition 2 : Un ternaire E peut être plongé dans un demi-groupe binaire si et seulement si E est un demi-groupe ternaire.

Preuve : La condition est évidemment nécessaire.
Dans [9] D. Monk et F.M. Sioson ont montré qu'elle est suffisante.

Soit E un demi-groupe ternaire pour la loi : abc : E est un demi-groupe binaire camouflé s'il existe sur E une loi binaire associative : $a \times b$ telle que : $abc = a \times b \times c$.

Proposition 3 : Tout demi-groupe ternaire contenant un élément m-inverse pour lui-même est un demi-groupe binaire camouflé.

Preuve : Si pour tout x, $exe = x$, par $a \times b = aeb$ on obtient :
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = abc$.

Soit E un demi-groupe ternaire plongé dans le demi-groupe binaire D', E' l'ensemble des produits ab dans D' pour a et b parcourant E et $D = E \cup E'$: On voit que E' et D sont stables pour la loi binaire induite ; ainsi E est encore plongé dans D et la partie E de D engendre le binaire D : Un tel plongement est qualifié de générique.
Le plongement établi dans [9] est générique et tel que $E \cap E' = \emptyset$; de plus il vérifie la propriété universelle : D est le demi-groupe binaire libre pour E.
Réciproquement si D est un demi-groupe binaire et θ un morphisme surjectif de binaires de D dans $(Z/2, \oplus)$, l'image réciproque E de 1 par θ est un demi-groupe ternaire.
Ainsi :

Proposition 4 : Tout demi-groupe ternaire peut être obtenu à partir d'un demi-groupe binaire D et d'un morphisme surjectif de binaires de D dans $(Z/2, \oplus)$.

Soit E un demi-groupe ternaire et D un demi-groupe binaire qui réalise un plongement générique de E dans $D = E \cup E'$. Si (a,b) est g-neutre dans E, $abx = x$ pour tout $x \in E$ et $abxy = xy$ pour tout $xy \in E'$ donc ab est neutre à gauche dans D. On en déduit le :

Lemme : Dans un demi-groupe ternaire si (a,b) est g-neutre et (a',b') est d-neutre alors (a,b) est d-neutre et (a',b') est g-neutre.

Théorème : Soit E un demi-groupe ternaire et $a \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) a est inversible,

ii) a possède un inverse,

iii) a est inversible aux extrêmes,

iv) a admet un unique inverse au milieu,

v) a possède un inverse au milieu,

vi) a est inversible au milieu.

Preuve : Compte-tenu du lemme il reste à remarquer que si $\bar{a}$ est inverse pour a et si b est inverse au milieu pour a alors :
$b = \bar{a}a\bar{b}a\bar{a} = \bar{a}\bar{a}\bar{a} = \bar{a}$.

I. 6

Définition : Un groupe ternaire est un demi-groupe ternaire inversible.

Il résulte de I. 5 théorème 1a :

Proposition 1 : Pour un demi-groupe ternaire les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Inversible aux extrêmes

ii) Inversible au milieu

iii) Groupe ternaire.

La proposition suivante énonce pour le cas ternaire une propriété établie par G. Thierrin [13] dans le cas binaire :

Proposition 2 : Un demi-groupe ternaire E est un groupe ternaire si et seulement si il est simplifiable et g,m, ou d-inversif.

Preuve : Soit E un groupe ternaire : notant $\bar{a}$ l'inverse de a :
$m_{ab}\, m_{\bar{a}\bar{b}} = \mathcal{J}$ implique m_{ab} injective donc E simplifiable (I. 5 proposition 1).
D'autre part $a = \bar{a}aa = a\bar{a}a = aa\bar{a}$ montre que E est inversif.

Réciproquement : Pour tout a il existe un unique b tel que $a = aab$ ou $a = aba$ ou $a = baa$ et par $aabaa = aaa$, l'une de ces égalités implique les autres. Alors pour tout x : $xaa = xabaa$ implique $x = xab$; de même $x = bax$, ainsi E est inversible aux extrêmes donc inversible.

Dans [4] M. Brissaud définit un groupe ternaire comme un demi-groupe ternaire E vérifiant :

i) Il existe a et b pour lesquels (a,b) et (b,a) sont d-neutres et g-neutres.

ii) Pour tout $x \in E$ il existe x' tel que $x'ax = b$ et il existe x'' tel que $x''bx = a$.

Proposition 3 : Notre définition d'un groupe ternaire est équivalente à celle de M. Brissaud.

Preuve : Soit E un demi-groupe ternaire inversible, $a \in E$ et $\bar{a}$ son inverse : $(a,\bar{a})$ vérifie i), $x' = \bar{\bar{a}}x\bar{a}$ et $x'' = a\bar{x}a$ vérifient ii). Réciproquement si E est un demi-groupe ternaire vérifiant i) et ii) $ax'a$ est inverse pour x.

Soit E un groupe ternaire et D un demi-groupe binaire qui réalise un plongement générique de E dans $D = E \cup E'$. Notant $\bar{a}$ l'inverse de a dans E on voit que pour tout $xy \in E'$: $xya\bar{a} = \bar{a}axy = xy$ donc $a\bar{a} = \bar{a}a$ est neutre dans D. D'autre part pour tout $ab \in E$ $ab\bar{\bar{b}}\bar{a} = \bar{b}aab$ est neutre dans D. Ainsi D est un groupe binaire. La réciproque est immédiate.
On peut donc affirmer :

Proposition 4 : La notion de groupe ternaire au sens de E.L. Post est équivalente à la notre.

Corollaire : Notre définition d'un groupe ternaire est équivalente à celle de W. Dörnte.

Rappelons que W. Dörnte définit un groupe ternaire comme un demi-groupe ternaire dans lequel toute équation : $xab = c$, $axb = c$, $abx = c$, admet une unique solution.

Proposition 5 : Soit E un demi-groupe ternaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Toute équation $xaa = b$ et toute équation $aax = b$ admettent une solution.

ii) Toute équation $axb = a$ et toute équation $axb = b$ admettent une solution.

iii) Toute équation $axa = b$ admet une solution.

iv) Toute équation $axa = a$ admet une unique solution.

v) E est un groupe ternaire.

Preuve : Soit $a \in E$:

i) implique v) : Il existe b tel que $baa = a$ et pour tout x il existe y tel que $x = aay = baaay = bax$. De même il existe c tel que $x = xac$; donc a est inversible aux extrêmes.

ii) implique v) : Il existe b tel que $aba = a$ et pour tout x il existe y tel que $x = xya = xyaba = xba$. De même il existe c tel que $x = acx$; donc a est inversible au milieu.

iii) implique v) : Il existe b tel que que $aba = a$ et pour tout x il existe y tel que $x = aya = ayaba = xba$ ...

iv) implique v) : Proposition 2.

Corollaire : Pour un demi-groupe ternaire les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) m-dominant,

ii) g et d-dominant,

iii) groupe ternaire.

Signalons pour terminer ce paragraphe :

*) L'étude des groupes ternaires par D. Vakarelov [15] qui comporte un aspect algébrique et un aspect géométrique ;

*) L'article de D. Monk et F.M. Sioson [10] qui contient des caractérisations des "m-groupes" (applicables ici pour $m = 3$).

I. 7

Définition : Un contre-demi-groupe ternaire est un ternaire qui vérifie :

$(xyz)tu = x(tzy)u = xy(ztu)$ (contre-associativité).

Exemple : Soit D un demi-groupe binaire pour la loi : ab, muni d'une application $\wedge$ de D dans D et E le ternaire pour la loi : $a \top b \top c = \hat{a}bc$ sur l'ensemble D.

E est un contre-demi-groupe ternaire lorsque $(D, \wedge)$ vérifie la condition suffisante :

$$\widehat{\hat{a}bc} = \hat{c}\hat{b}a \quad .$$

Nous allons voir que cette construction est fondamentale.

Lemme 1 : Soit θ un morphisme de contre-demi-groupes ternaires de E dans E' et $e \in E$, $e' \in E'$ des éléments inversibles aux extrêmes tels que : $e' = (e)\theta$.

Alors $(\bar{e})\theta = \overline{(e)\theta}$.

Preuve : Soit $k' = (\bar{e})\theta$; $e' = (\bar{e}ee)\theta = k'e'e'$, d'où :

$$\begin{aligned}
\overline{e'} &= \overline{e'e'\overline{e'}} \\
&= \overline{e'}\,(k'e'e')\,\overline{e'} \\
&= (\overline{e'}e'e')\,k'\overline{e'} \\
&= e'k'\overline{e'} \\
&= (k'e'e')\,k'\overline{e'} \\
&= k'\,(k'e'e')\,\overline{e'} \\
&= k'e'\overline{e'} \\
&= k' \quad .
\end{aligned}$$

Cette propriété du lemme 1 ne s'applique pas à un ternaire quelconque : on peut construire aisément un contre exemple à partir de I. 3 Exemple 1.

Soit E un ensemble et e un élément distingué de E : (E,e) est un ensemble pointé. L'élément distingué est encore appelé loi zéroaire sur E.

Notation : B est la catégorie suivante : Un objet $(D, \alpha, \wedge)$ de B est un demi-groupe binaire D, avec la loi unaire $\wedge$ qui vérifie la condition de l'exemple précédent et pour laquelle $\hat{\alpha}$ est neutre dans D.

Un morphisme est une application qui respecte les lois : binaire, unaire et zéroaire.

C est la catégorie suivante : Un objet (E,e) est un contre-demi-groupe ternaire E pointé en e inversible aux extrêmes.
Un morphisme est une application qui respecte les lois : ternaire et zéroaire.

Théorème 1 : Les catégories B et C sont équivalentes.

Preuve : On définit un foncteur $\mathcal{C}$ de B dans C en associant à l'objet $(D, \alpha, \wedge)$ le contre-demi-groupe ternaire de l'exemple, pointé en α, et au morphisme θ la même application.
Soit (E,e) un objet de C, D le binaire E pour la loi : $a \times b = aeb$ et $\wedge$ l'application : $\hat{a} = \bar{e}a\bar{e}$: on vérifie que $(D, e, \wedge)$ est un objet de B. θ étant un morphisme de C on lui associe la même application qui respecte $a \times b$, $\hat{a}$ (car θ respecte $\bar{e}$: lemme 1) et e. Ainsi est défini un foncteur $\mathcal{B}$ de C dans B. On montre enfin que les foncteurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont réciproques.

Soit E un contre-demi-groupe ternaire contenant un élément inversible aux extrêmes e : la preuve de ce théorème montre que E muni de la loi binaire : $a \times b = aeb$ est un demi-groupe binaire de neutre $\bar{e}$; posant $\hat{a} = \bar{e}a\bar{e}$ on a : $abc = a \times \hat{b} \times c$.

Dans [2] nous avons établi des propriétés analogues pour les ternaires qui vérifient l'associativité faible : $(xyz)tu = xy(ztu)$.

Soit B' la sous-catégorie de B dont les objets $(D, \alpha, \wedge)$ vérifient : $\overset{\wedge}{\alpha} = \alpha$ (neutre dans D).

Lemme 2 : Pour tout objet de B', $\wedge$ est un contre morphisme $(\overbrace{ab} = \overbrace{ba})$ involutif.

Preuve : $\overbrace{ab} = \overbrace{a \overset{\wedge}{\alpha} b} = \hat{b} \alpha \hat{a} = \overbrace{ba}$
$\hat{a} = \overbrace{\alpha \hat{a} \alpha} = \overset{\wedge}{\alpha} a \overset{\wedge}{\alpha} = a$.

L'image de B' par le foncteur $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie de C des contre-demi-groupes ternaires pointés en e inverse pour lui-même $(\bar{e} = e)$. Cette sous-catégorie et son lien avec B' ont été étudiés par V.V. Vagner [14].

Reprenons le cas général :

Lemme 3 : Pour tout objet de la catégorie B l'application $\wedge$ est bijective.

Preuve : $\wedge$ est surjective : $\overset{\wedge}{\alpha\ \hat{b}\ \alpha} = b$

$\wedge$ est injective : $\hat{b} = \hat{c}$ implique $b = \overset{\wedge}{\alpha\ \hat{b}\ \alpha} = \overset{\wedge}{\alpha\ \hat{c}\ \alpha} = c$.

Soit (E,e) et (D, e, $\wedge$) des objets respectifs de C et B qui se correspondent par les foncteurs $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{G}$. On voit que E est g et d-simplifiable si et seulement si le binaire D est simplifiable ; ceci étant, par le lemme 3, E est aussi m-simplifiable. Plus généralement on démontre comme pour les demi-groupes ternaires une propriété analogue à I. 5 proposition 1.

On voit d'autre part que la preuve de I. 5 proposition 3 est valable pour les contre-demi-groupes ternaires.

Soit (D, e, $\wedge$) un objet de B et a,b des éléments de D : si $\hat{a} \times b = \hat{e}$ (neutre dans le binaire D) alors $\hat{b} \times a = \hat{b} \times a \times \hat{e} = \overset{\wedge}{e \times a \times b} = \overset{\wedge}{e \times e} = \hat{e}$.
Plus généralement :

Lemme 4 : Dans un contre-demi-groupe ternaire si (a,b) est d-neutre (resp. g-neutre) alors (b,a) est aussi d-neutre (resp. g-neutre).

Preuve : Si $x = xab$ alors $xba = xb(aab) = x(aab)b = xab = x$.

Ce lemme 4 implique le :

Théorème 2 : Soit E un contre-demi-groupe ternaire et $a \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) a est inversible,
ii) a possède un inverse,
iii) a est inversible aux extrêmes,
iv) a admet un unique inverse au milieu,
v) a possède un inverse au milieu,
vi) a est inversible au milieu .

Soit E un contre-demi-groupe ternaire et a un élément inversible dans E : il existe $e \in E$ pour lequel (E,e) est un objet de la catégorie C. (D, e, $\wedge$)

étant son image par le foncteur $\mathcal{P}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) b est inverse pour a dans E,
ii) b est inverse pour $\hat{a}$ dans D,
iii) $\hat{b}$ est inverse pour a dans D.
Il en résulte que si $\bar{a}$ est l'inverse de a dans E et a^{-1} est l'inverse de a dans D alors : $\bar{a} = \hat{a}^{-1}$.
En particulier E est inversible si et seulement si D est un groupe binaire.

I. 8

Définition 1 : Un contre groupe ternaire est un contre-demi-groupe ternaire inversible.

On démontre pour les contre groupes ternaires des propriétés analogues à I. 6, Propositions 1, 2, 5 et Corollaire...

Soit E un contre groupe ternaire ; pour tout $a \in E$ il existe un unique $\bar{a}$, l'inverse pour a, tel que, pour tout $x \in E$:
$x\bar{a}a = x\bar{a}a = \bar{a}ax = a\bar{a}x = x$.

Définition 2 : L'involution : $a \to \bar{a}$ est l'involution barre.

Proposition : Soit E un contre groupe ternaire et $a \in E$: $\bar{a}$ est l'unique solution de l'une quelconque des équations : $a = xaa$; $a = axa$; $a = aax$.

Preuve : Analogue pour les contre groupes ternaires de I. 6, Proposition 2.

Corollaire 1 : Tout morphisme de contre groupes ternaires respecte l'involution barre.

Corollaire 2 : L'involution barre sur un contre groupe ternaire est un automorphisme.

Notation : Soit E un contre groupe ternaire et $e \in E$.
On note E_e le groupe binaire image de $(E,\bar{e})$ par le foncteur $\mathcal{P}$ de I. 7.
Ainsi E_e est l'ensemble initial E muni de la loi binaire : $a \times b = a\bar{e}b$ pour laquelle e est neutre ; l'inverse a^{-1} de a dans E_e est : $e\bar{a}e$. Appliquant le foncteur $\mathcal{C}$ à $(E_e, \bar{e}, \wedge)$, avec $\hat{a} = eae$, on obtient le contre groupe ternaire E et : $abc = a \times \bar{b} \times c$.

La relation $\hat{a} = (\bar{a})^{-1}$ nous permet encore de procéder de la manière suivante : On remarque tout d'abord que $(E_e, e, (-1))$ est un objet de la catégorie B. Ceci étant son image par le foncteur $\mathcal{C}$ est le contre groupe ternaire E pour la loi : $a \top b \top c = a \times b^{-1} \times c$; on munit ensuite E de la nouvelle loi ternaire : $a \top \bar{b} \top c = a \times \bar{b}^{-1} \times c = \overset{\wedge}{abc} = abc$, ce qui permet d'obtenir le contre groupe ternaire E initial.

C'est ce dernier point de vue que nous allons adopter par la suite.

I. 9

Définition 1 : Un strict contre groupe ternaire est un contre groupe ternaire tripotent (I. 2 définition).

Par I. 8 proposition on obtient le :

Lemme 1 : Soit E un contre-groupe ternaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Tout élément est inverse pour lui-même.

ii) L'involution barre est l'application identique.

iii) E est strict.

Dans [5], J. Certaine a montré qu'un strict contre groupe ternaire peut être caractérisé par les axiomes :

$$\begin{cases} (xyz)tu = xy(ztu) & \text{(associativité faible)} \\ xyy = yyx = x & \text{(tout élément est inverse pour lui-même)} \end{cases}$$

Outre un résultat de structure que nous signalerons plus loin, il a établi un lien avec la géométrie affine ; en particulier le quadruple (x,y,z,t) est appelé parallélogramme si $t = xyz$.

En I. 2 nous avons défini l'application i_{ab} d'un ternaire dans lui-même lorsque i est g,m ou d.

Soit E un strict contre groupe ternaire : on vérifie que (x,y,z,t) est un parallélogramme dans le sens précédent si et seulement si est vérifiée l'une des propriétés équivalentes : $t = xd_{yz}$; $z = yd_{xt}$; $t = ym_{xz}$; $y = tm_{zx}$.

Définition 2 : Soit E un contre groupe ternaire et a,b, des éléments de E :

d_{ab} est une translation (on sous-entend : à droite),

m_{ab} est une symétrie.

Proposition : Toute translation sur un strict contre-groupe ternaire est un automorphisme.

Preuve : Par $(xab)(yab)(zab) = ((xab)ba)\, y(zab) = (xyz)ab$, d_{ab} est un morphisme.

De plus : $d_{ab}\, d_{ba} = d_{ba}\, d_{ab} = \mathcal{I}$.

Appliquons maintenant I. 7 théorème : On voit que le foncteur $\mathcal{B}$ associe, à la sous-catégorie pleine dans C des stricts contre-groupes ternaires pointés, la sous-catégorie pleine dans B dont les objets $(D, \alpha, \wedge)$ vérifient : D est un groupe binaire, $\hat{a} = a^{-1}$ et (donc) α est le neutre ; ainsi on peut oublier α et $\wedge$, d'où le :

Théorème 1 : La catégorie des stricts contre-groupes ternaires pointés est équivalente à la catégorie des groupes binaires.

Soit D un groupe binaire pour la loi : ab et de neutre e : $(D, e, (-1))$ est un objet de B auquel le foncteur $\mathcal{C}$ associe le strict contre-groupe ternaire D pour la loi : $ab^{-1}c$. On l'appelle le strict contre-groupe ternaire engendré par le groupe binaire D.

Corollaire : Soit E un strict contre-groupe ternaire :

Pour tous h, k, de E les groupes binaires E_h et E_k (I. 8 notation) sont isomorphes.

Preuve : La translation d_{hk} est un isomorphisme de (E,h) vers (E,k) (proposition) donc son image par le foncteur $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de E_h vers E_k.

Etant donné un strict contre-groupe ternaire E ce corollaire nous autorise à parler du groupe binaire E_e sans accorder d'importance au choix de l'élément distingué e.

En associant E_e à E d'une part, en remplaçant une loi de groupe binaire : ab par la loi ternaire : $ab^{-1}c$ d'autre part, on établit une correspondance biunivoque entre la classe des stricts contre-groupes ternaires et celles des groupes binaires.

Nous retrouvons ainsi des résultats établis par J. Certaine dans [5].

Soit E un strict contre-groupe ternaire et T l'ensemble de ses translations (Définition 2).

Lemme 2 : T est l'ensemble des d_{ea} pour e fixé dans E et a parcourant E.

Preuve : L'application : $a \in E \to d_{ea} \in T$ est injective car si $d_{ea} = d_{eb}$ alors $a = eea = eeb = b$; elle est surjective car $xe(ebc) = xbc$.

En particulier pour tout $(a,b) \in E^2$, il existe une unique translation qui applique a sur b et c'est d_{ab}.

La formule $d_{ab}\, d_{bc} = d_{ac}$ montre alors que T est un sous-demi-groupe de $(E)\mathfrak{F}$.
En fait tout élément d_{ab} est inversible (proposition) et T contient l'inverse d_{ba}. T est donc un groupe binaire.

Théorème 2 : Le groupe binaire T des translations d'un strict contre-groupe ternaire E est isomorphe au groupe binaire E_e.

Preuve : La bijection : $a \in E_e \to d_{ea} \in T$ (lemme 2) est un isomorphisme puisque l'image de $a \times b = aeb$ est $d_{ea}\, d_{eb}$.

I. 10

Notation : Soit E un ternaire et $\wedge$ une involution sur E. On note K_1 la propriété : $\widehat{abc} = \hat{a}\,\hat{b}\,\hat{c}$ ($\wedge$ est un morphisme).

Lemme 1 : Soit E un contre-groupe ternaire pour la loi : abc et muni de l'involution $\wedge$:
Le ternaire E pour la loi : $a \top b \top c = \hat{a}\hat{b}\hat{c}$ est un contre groupe ternaire si et seulement si $\wedge$ vérifie K_1.

Preuve : E étant m-simplifiable, la loi : $a \top b \top c$ est contre associative si et seulement si $\widehat{\hat{a}\hat{b}\hat{c}} = \hat{a}\,b\,\hat{c}$ c'est -à-dire sous K_1 puisque $\wedge$ est une involution.
D'autre part tout élément est inversible aux extrêmes donc inversible.

On dit que $(F, \wedge)$ est un contre groupe ternaire à involution lorsque $\wedge$ est un automorphisme involutif pour le contre groupe ternaire F.

F étant un contre-groupe ternaire à involution $\wedge$, le contre-groupe ternaire F pour la loi : $a \top b \top c = \hat{abc}$ (lemme 1) est dit engendré par $(F, \wedge)$.
Si F' est le contre-groupe ternaire engendré par $(F, \wedge)$ alors $\wedge$ vérifie K_1 sur F' et F est engendré par $(F', \wedge)$.
En particulier tout contre-groupe ternaire F est à involution barre (I. 8 corollaire 2) : on note $(F)\mathcal{G}$ le strict contre-groupe ternaire engendré par $(F, -)$. Ainsi :

Proposition : Tout contre-groupe ternaire peut être engendré par un strict contre-groupe ternaire à involution.

Soit F un contre-groupe ternaire et $E = (F)\mathcal{G}$ le strict contre-groupe ternaire associé avec la loi : $a \top b \top c = \bar{abc}$. Soit e un élément de l'ensemble $F(= E)$: le groupe binaire F_e (I. 8 notation) est l'ensemble F avec la loi $a \times b = a\bar{e}b$.
Le groupe binaire E_e est l'ensemble F avec la loi :
$(a,b) \to a \top e \top b = \bar{aeb} = a \times b$, d'où le :

Lemme 2 : Soit F un contre-groupe ternaire et $E = (F)\mathcal{G}$:
Les groupes binaires F_e et E_e sont identiques.

Ceci étant, l'involution barre sur F vérifie K_1 sur l'ensemble F avec la loi : $a \times b^{-1} \times c$.
Plus généralement on dit que l'involution $\wedge$ vérifie K_1 sur le groupe binaire G pour la loi : ab si : $\widehat{ab^{-1}c} = \hat{a}\hat{b}^{-1}\hat{c}$.

Exemple : Soit G un groupe binaire et k un élément involutif dans G :
L'application $\hat{a} = ak$ est une involution qui vérifie K_1 sur G.
Ajoutons les deux remarques suivantes :
i) Si G n'est pas commutatif, $\wedge$ ne commute pas avec l'involution canonique : $a \to a^{-1}$.
ii) Si G est commutatif $\wedge$ commute avec a^{-1} mais $\wedge$ ne respecte pas le neutre e pour $k \neq e$.

On voit que :

Lemme 3 : Soit G un groupe binaire muni de l'involution $\wedge$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

.../...

i) $\wedge$ vérifie K_1 sur G et respecte le neutre,
ii) $\wedge$ est un automorphisme.

Il en résulte que si F est un contre-groupe ternaire l'involution barre est un automorphisme pour le groupe binaire F_e si et seulement si : $\bar{e} = e$.

Soit G un groupe binaire : l'ensemble G avec la loi : $ab^{-1}c$ est le strict contre-groupe ternaire E engendré par G (I. 9). Si de plus G est muni d'une involution $\wedge$ vérifiant K_1, E est un strict contre-groupe ternaire à involution $\wedge$ donc il engendre un contre-groupe ternaire F pour la loi : $a \top b \top c = a\hat{b}^{-1}c$ sur l'ensemble G. Enfin F peut être pointé sur le neutre e de G.
Cette construction qui permet de passer de $(G, \wedge)$ à (F, e) est réciproque de celle qui à (F, e) associe le groupe binaire F_e avec l'involution barre.
Bien entendu un morphisme de groupes binaires avec une involution est un morphisme de binaires qui respecte l'involution.
Ceci étant, on voit que :

Théorème : La catégorie des contre-groupes ternaires pointés est équivalente à la catégorie des groupes binaires avec une involution vérifiant K_1.

I. 11

Lemme 1 : Sous l'hypothèse de m-commutativité les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) Demi-groupe ternaire,
ii) Contre-demi-groupe ternaire.

Notation 1 : Pour un demi-groupe ternaire m-commutatif la loi ternaire sera généralement notée : $a \perp b + c$.

Cette notation permet de modifier l'ordre des couples : signe, lettre (+ étant sous-entendu pour la première) et d'utiliser les parenthèses en appliquant la règle des signes.

Définition : Un strict groupe ternaire est un groupe ternaire tripotent.

Un groupe ternaire est strict si et seulement si tout élément est inverse pour lui-même.

Proposition 1 : Tout strict groupe ternaire est m-commutatif.

Preuve : $abc = \overline{\overline{abc}} = \overline{\overline{c}\,\overline{b}\,\overline{a}} = cba$.

Ainsi l'expression : "strict groupe ternaire" est équivalente à : "strict contre-groupe ternaire m-commutatif".

On voit que :

Lemme 2 : Soit F un contre-groupe ternaire et $e \in F$:
Le groupe binaire F_e est commutatif si et seulement si F est m-commutatif.

Notation 2 : Pour un strict groupe ternaire E, la loi sur le groupe binaire commutatif E_e sera généralement notée : $a \oplus b$ et la loi ternaire sur E : $a - b + c$.

Avec ces notations la translation d_{ab} (resp. la symétrie m_{ab}) sur le strict groupe ternaire E est l'application qui à x associe : $x - a + b$ (resp. $a - x + b$).

Proposition 2 : Toute symétrie sur un strict groupe ternaire est un automorphisme involutif.

Preuve : Par $(a-x+b)-(a-y+b)+(a-z+b) = a-(x-y+z)+b$, m_{ab} est un morphisme.
De plus : $m_{ab}\, m_{ab} = \mathcal{I}$.

Dans I. 10 exemple avec G commutatif, si l'involution $\hat{x} = x \oplus k$ est une symétrie pour le strict groupe ternaire E engendré par G alors il existe a et b tels que pour tout $x \in G$: $x \oplus k = a \ominus x \oplus b$ ce qui impose à G la caractéristique 2. En dehors de cette hypothèse l'automorphisme involutif $\wedge$ pour E n'est pas une symétrie.

Théorème 1 : Un groupe ternaire m-commutatif F est commutatif si et seulement si l'involution barre est une symétrie pour le strict groupe ternaire $(F)\mathcal{G}$.

Preuve : Si F est commutatif alors dans le groupe binaire F_e :
$a \ominus \bar{b} \oplus c = b \ominus \bar{a} + c$ impose, pour $b = c$: $\bar{a} = c \ominus a \oplus \bar{c}$ soit $\bar{a} = c - a + \bar{c}$ sur $(F)\mathcal{G}$; c étant fixé l'involution barre est la symétrie $m_{c\bar{c}}$ sur $(F)\mathcal{G}$.

Réciproquement soit E un strict groupe ternaire, $m_{ab} = \wedge$ une symétrie de E et F le contre-groupe ternaire engendré par (E, $\wedge$) : F est l'ensemble E muni de la loi : $x \perp y + z = x-\hat{y}+z = x+y+z-a-b$, donc F est commutatif.

Corollaire : Un strict groupe ternaire est commutatif si et seulement si l'application identique est une symétrie.

Proposition 3 : Un strict groupe ternaire est commutatif si et seulement si c'est une demi-groupe binaire camouflé (I. 5).

Preuve : Si E est un strict groupe ternaire commutatif tout élément est m-inverse pour lui-même, alors on applique I. 5, Proposition 3.
Réciproquement soit G un groupe binaire pour la loi : ab et E le groupe ternaire pour la loi abc : si E est m-commutatif alors G est commutatif donc E est commutatif.

Soit E un strict groupe ternaire commutatif et E_e le groupe binaire associé : la loi ternaire sur E s'obtient directement par : $a \oplus b \oplus c$ et non plus seulement par $a \ominus b \oplus c$. Nous reviendrons sur cette propriété dans le contexte de la caractéristique (Chapitre V).

Proposition 4 : Soit E un strict groupe ternaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E est commutatif.

ii) Toute symétrie est une translation et toute translation est une symétrie.

iii) Il existe une translation et une symétrie qui sont égales .

Preuve : i) implique ii) : résulte des commentaires précédents.

iii) implique i) : Il existe a, b, a', b', tels que pour tout $x \in E$: $x-a+b = a'-x+b'$ d'où
$x = (a-b+a')-x+b'$. On conclut par le corollaire.

Lemme 3 : Soit E un strict groupe ternaire :

L'ensemble des symétries de E est l'ensemble des m_{ea} pour e fixé dans E et a parcourant E.

Preuve : L'application θ qui à $a \in E$ associe la symétrie m_{ea} est :
injective : si $m_{ea} = m_{eb}$ alors $e-e+a = e-e+b$ donc $a = b$
surjective : $m_{ea} = m_{bc}$ pour $a = b-e+c$.

En particulier pour tout $(a,b) \in E^2$, il existe une unique symétrie qui applique a sur b et c'est m_{ab} .

Soit E un strict groupe ternaire, T l'ensemble des translations, T' l'ensemble des symétries et $T'' = T \cup T'$.
Par la proposition 4 deux cas peuvent se présenter :
i) $T = T' = T''$ lorsque E est commutatif,
ii) $T \cap T' = \emptyset$ lorsque E n'est pas commutatif.
On a vu (I. 9 théorème 2) que T est un sous-groupe de $(E)\mathscr{A}$ isomorphe au groupe binaire E_e ; par conséquent T est ici commutatif.

Théorème 2 : Avec les notations précédentes :
T'' est un groupe binaire,
T' est un strict groupe ternaire isomorphe à E ; il est plongé dans T'' (I. 5).

Preuve : Le produit de deux symétries est une translation. Un produit symétrie translation ou translation symétrie est une symétrie : Ainsi T'' est stable par la loi de composition ; il contient le neutre et l'inverse de chaque élément.
Le produit de trois symétries étant une symétrie, T' est un sous-demi-groupe ternaire canonique de T'' (I. 5).
Enfin la bijection θ de la preuve du lemme 3 est un isomorphisme puisque la composée de m_{ea} puis m_{eb} puis m_{ec} est l'application : $x \to e-x+(a-b+c)$.

Soit E un strict groupe ternaire et T'' le groupe binaire de ses translations et de ses symétries. Il résulte de ce théorème 2 et de I. 9 théorème 2 que :
i) Dans le contexte du paragraphe I. 9, on peut identifier E au strict contre-groupe ternaire engendré par le groupe binaire des translations de E.
ii) Dans le contexte du paragraphe I. 5, on peut identifier E au sous-groupe ternaire canonique de T'' des symétries de E.

Références pour le chapitre I

1 R. Baer : Zur einführung des Scharbegriffs. J. Reine Angew. Math. Vol. 160 (1929).

2 A. Batbedat : Faibles demi-groupes ternaires contenant un élément inversible aux extrêmes. Comptes rendus de l'académie des sciences de PARIS (1974).

3 A. Batdebat : Plongement d'un n-opératif dans un binaire. t. 278, A 665.

4 M. Brissaud : Eléments aléatoires dans les groupes et demi-groupes ternaires topologiques. Comptes Rendus de l'académie des sciences de PARIS, (1970).

5 J. Certaine : The ternary operation of a group. Bull. Amer. Math. Soc. 49, (1943).

6 P.M. Cohn : Universal algebra. Harper et Row (1965).

7 W. Dörnte : Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff. Math. Z. 29, (1928).

8 M. Hosszù : On the explicit form of n-group operations. Debrecen 10, (1963).

9 D. Monk et F.M. Sioson : m-semi-groups, semi-groups, and function representation. Fundamenta Mathématica (1966).

10 D. Monk et F.M. Sioson : On the general theory of m-groups (1970).

11 E.L. Post : Polyadics groups. Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940).

12 H. Prüfer : Theorie der abelschen gruppen. Math. Z. 20 (1924).

13 G. Thierrin : Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semi-groupe soit un groupe. Comptes rendus de l'académie des sciences de PARIS. T. 232 (1951).

14 V.V. Vagner : Théorie des amas généralisés. Math. Sbornik. N. S. 32 (1953).

15 D. Vakarelov : Groupes ternaires. Annuaire de l'université de SOFIA. Vol. 61 (1967).

16 D. Zupnik : Polyadics semi-groups. Debrecen. 14 (1967).

II. 1

Définition : Soit F un ternaire pour la loi : $a \top b \top c$ (I. 1) et S un ensemble : *S opère sur F* s'il existe une application : $(a,s) \in F \times S \to as \in F$ telle que : $(a \top b \top c)s = as \top bs \top cs$.

Dans ce cas on dit que *le ternaire F est à opérateur S*.
Soit $a \in F$: *S est fixe sur a*, ou encore *a est fixe pour S*, si pour tout $s \in S$: $as = a$.

Exemple : Soit G un groupe binaire pour la loi $\times$: par : $(a,s) \to a \times s$, G opère sur le strict contre-groupe ternaire engendré par G (I. 9) puisque : $a \times s \times (b \times s)^{-1} \times c \times s = a \times b \times c \times s$.
Si G n'est pas réduit au neutre, aucun élément n'est fixe.

Soit (F,S) et (F',S') des ternaires à opérateur : (θ , θ_s) est un *morphisme de ternaires à opérateur* si θ est un morphisme de ternaires de F dans F' et θ_s une application de S dans S' tels que : $(as)\,\theta = (a)\,\theta\ (s)\,\theta_s$.
Le composé de (θ , θ_s) puis $(\theta' , \theta'_{s'})$ est le morphisme $(\theta\theta' , \theta_s\, \theta'_{s'})$, d'autre part $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{I}_s$) étant l'application identique sur F (resp. S) : $(as)\,\mathcal{I} = as = (a)\,\mathcal{I}\ (s)\,\mathcal{I}_s$.

Un morphisme de binaires à opérateur est défini de manière analogue, θ étant un morphisme de binaires.

II. 2

Lemme 1 : Si G est un groupe binaire à opérateur S pour : $(a,s) \to as$, alors avec la même loi externe : as, S opère sur le strict contre-groupe ternaire engendré par G (I. 9).

Preuve : $(a \times b^{-1} \times c)s = as \times b^{-1}s \times cs = as \times (bs)^{-1} \times cs$.

On remarquera que dans ce cas G possède nécessairement un élément fixe pour S.

Lemme 2 : Si E est un strict contre-groupe ternaire à opérateur S, pour : $(a,s) \to as$, avec $e \in E$, fixe pour S, alors avec la même loi externe : as, S opère sur le groupe binaire E_e (I. 8).

Preuve : $(a \times b)s = (a \top e \top b)s = as \top e \top bs = as \times bs$.

Un contre-groupe ternaire E à opérateur S est pointé en $e \in E$ lorsque S est fixe sur l'élément distingué e. Comme pour I. 9 théorème 1, on voit que :

Théorème : La catégorie des stricts contre-groupes ternaires à opérateur et pointés est équivalente à la catégorie des groupes binaires à opérateur.

II. 3

Soit E, E' des stricts contre-groupes ternaires, $e \in E$ et $e' \in E'$; θ étant un morphisme de E dans E' on note $\mathscr{C}_\theta$ la translation de E' dans E' qui applique $(e)\theta$ sur e'. Le morphisme $\theta' = \theta\, \mathscr{C}_\theta$ qui applique e sur e' est le morphisme e-e'-pointé canoniquement associé à θ .

Lorsque $E = E'$ et $e = e'$ on dit : le morphisme e-pointé associé à θ .
On se place maintenant dans cette hypothèse et on note H le demi-groupe binaire des endomorphismes de E ; l'application prime sur H : $\theta \to \theta' = \theta\, \mathscr{C}_\theta$ est idempotente puisque $\mathscr{C}_{\theta'} = \mathcal{I}$. Comme $(a)\theta' = (a)\theta \top (e)\theta \top e$, on voit que :

Lemme 1 : $\mathscr{C}_\theta\, \psi\, \mathscr{C}_\psi = \psi\, \mathscr{C}_{\theta\, \psi}$.

Proposition 1 : L'application prime est un morphisme idempotent sur H.

Preuve : $(\theta\, \psi)' = \theta\, \psi\, \mathscr{C}_{\theta\, \psi} = \theta\, \mathscr{C}_\theta\, \psi\, \mathscr{C}_\psi = \theta'\, \psi'$.

Corollaire :

i) Si θ et ψ commutent alors θ' et ψ' commutent.
ii) Si θ est involutif alors θ' est involutif.

Lemme 2 :

i) Si θ et ψ commutent alors :
$(e)\theta\, \psi' \top e \top (e)\psi = (e)\psi\, \theta' \top e \top (e)\theta$
ii) Si θ est involutif alors :
$(e)\theta\, \theta' \top e \top (e)\theta = e$

Preuve : i) $(e)\theta\, \psi' = (e)\theta\, \psi \top (e)\psi \top e$ et $(e)\psi\, \theta' = (e)\psi\, \theta \top (e)\theta \top e$
ii) $(e)\theta\, \theta' = e \top (e)\theta \top e$.

Réciproquement soit θ' un morphisme qui respecte e et soit e_θ un point (élément) de E : le morphisme e-dilaté associé à (θ', e_θ) est le composé de θ' par la translation qui applique e sur e_θ. On voit que son image par l'application prime sur H est θ' ce qui nous autorise à le noter θ ; ceci étant, $\mathcal{C}_\theta$ est la translation qui applique $e_\theta = (e)\,\theta$ sur e.

Proposition 2 : Soit E un strict contre-groupe ternaire, $e \in E$, θ', ψ' des morphismes qui respectent e, e_θ, e_ψ, des points de E et θ, ψ les morphismes e-dilatés respectivement associés à (θ', e_θ), (ψ', e_ψ) ; si les égalités nécessaires du lemme 2 sont vérifiées alors :
i) θ et ψ commutent lorsque θ' et ψ' commutent,
ii) θ est involutif lorsque θ' est involutif.

Preuve : Par construction, pour tout $x \in E$:

$(x)\,\theta = (x)\,\theta' \top e \top (e)\,\theta$ et $(x)\,\psi = (x)\,\psi' \top e \top (e)\,\psi$

i) $(x)\,\theta\,\psi = (x)\,\theta'\,\psi' \top e \top (e)\,\theta\,\psi' \top e \top (e)\,\psi$
$= (x)\,\psi'\,\theta' \top e \top (e)\,\psi\,\theta' \top e \top (e)\,\theta$
$= (x)\,\psi\,\theta$

ii) $(x)\,\theta\,\theta = x \top e \top (e)\,\theta\,\theta' \top e \top (e)\,\theta$
$= x \top e \top e$
$= x$

II. 4

Soit E un strict contre-groupe ternaire, H le demi-groupe binaire des endomorphismes de E et S un ensemble qui opère sur E par : $(a,s) \to as$. A chaque $s \in S$ on associe l'élément : $a \to as$ de H ; le morphisme image par l'application prime sur H (II. 3) est alors : $a \to as \top es \top e$. Ceci justifie la :

Proposition 1 : Soit E un strict contre-groupe ternaire à opérateur S pour la loi externe : as et soit $e \in E$:
Par : $a * s = as \top es \top e$, S opère sur E et il est fixe sur e.

La loi : $a * s$ de cette proposition est la loi externe e-pointée sur (E,S). On voit que si S est fixe sur E, la loi e-pointée est identique à la loi externe initiale.

Proposition 2 : Soit E un strict contre-groupe ternaire à opérateur S :

Quels que soient h et k dans E, les stricts contre-groupes ternaires à opérateur S pour les lois externes respectivement h-pointée et k-pointée sont isomorphes.

Preuve : Soit d_{hk} la translation qui applique h sur k : c'est un automorphisme pour le ternaire E ; d'autre part notant $a *_h s = as \top hs \top h$ et $a *_k s = as \top ks \top k$, il vient : $(a *_h s)\, d_{hk} = (a)\, d_{hk} *_k s$ donc $(d_{hk}, \mathcal{T}_s)$ est un morphisme de ternaires à opérateur.

Ces résultats complètent ceux de II. 2 ; ils permettent d'associer canoniquement à chaque strict contre-groupe ternaire E à opérateur S une structure de groupe binaire à opérateur même si, initialement E n'a pas d'élément fixe pour S (éventualité qui n'est pas exclue : voir II. 1 exemple).

La construction réciproque de celle de la proposition 1 est la suivante :

Proposition 3 : Soit E un strict contre-groupe ternaire à opérateur S, pour la loi externe : $a * s$, fixe sur $e \in E$ et $(e_s)_{s \in S}$ une famille de points de E :
Par : $as = a * s \top e \top e_s$, S opère sur E.
La loi : $a * s$ est la loi externe e-pointée associée à : as .

La loi : as de cette proposition est la loi externe e-dilatée associée à la loi externe : $a * s$ et la famille $(e_s)_{s \in S}$.

Compte tenu de II. 2, on peut résumer les propriétés précédentes par le :

Théorème : Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les structures de strict contre-groupe ternaire à opérateur et de groupe binaire à opérateur avec une famille d'éléments distingués indexée par l'opérateur.

II. 5

Soit F un contre-groupe ternaire pour la loi : abc et $E = (F)\,\mathcal{G}$ le strict contre-groupe ternaire F pour la loi : $a \top b \top c = a\bar{b}c$.
Soit $e \in F$: l'involution barre étant un endomorphisme de E, on considère le

morphisme e-pointé associé (II. 3) ; il est défini par : $\hat{a} = \bar{a} \top \bar{e} \top e$. Par II. 3 corollaire, $\wedge$ est involutif : on l'appelle l'involution e-pointée sur F. Dans F on a donc : $\hat{a} = \bar{a}ee$.
Soit F' le contre-groupe ternaire engendré par (E, $\wedge$) (I. 10) :

Proposition 1 : F' est l'ensemble F avec la loi ternaire :
(a,b,c) → a'bc, où a' est l'image de a par la translation qui, dans (F) $\mathcal{G}$, applique e sur $\bar{e}$.

Preuve : La loi sur F' est : $a \top \hat{b} \top c = a(\overline{\bar{b}ee})c = a(b\bar{e}\bar{e})c = (a\bar{e}\bar{e})bc = a'bc$
où $a' = a \top e \top \bar{e}$.

Un groupe binaire à involution $\wedge$ est un groupe muni d'un automorphisme involutif $\wedge$.

Exemple 1 : Le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls est à involution $\wedge$ pour : $\overset{\wedge}{a + ib} = a - ib$. (Attention : cette définition ne coïncide pas avec celle IX. 7 appliquée aux groupes).

Proposition 2 : Soit F un contre-groupe ternaire dans lequel $e \in E$ est fixe pour l'involution barre :
Le groupe binaire F_e est à involution barre.

Preuve : $a \times b = \overline{aeb} = \bar{a}e\bar{b} = \bar{a} \times \bar{b}$.

Dans la construction de la proposition 1 l'involution barre sur F' est fixe sur e. On sait d'autre part (II. 4 proposition 2) que le choix de e n'a pas d'importance.
Ainsi la notion d'involution e-pointée sur un contre-groupe ternaire F permet d'associer canoniquement à F un groupe binaire à involution.

La notion réciproque est celle d'involution dilatée sur un groupe binaire à involution avec un élément distingué.
Soit G un groupe binaire pour la loi : $\times$, de neutre e, et à involution $\wedge$; le strict contre-groupe ternaire E engendré par G est l'ensemble G avec la loi $a \top b \top c = a \times b^{-1} \times c$. L'involution $\wedge$ vérifie K_1 sur E et est fixe sur e.
Soit $g \in G$: le morphisme e-dilaté pour E, associé à ($\wedge$, g) (II. 3) est une involution si et seulement si : $\hat{g} = e \top g \top e$ (II. 3 proposition 2) c'est-à-dire $\hat{g} = g^{-1}$ dans G.

Exemple 2 : Dans l'exemple 1 cette condition est vérifiée par les éléments dont le module est l'unité.

Proposition 3 : Soit G un groupe binaire à involution $\wedge$ et $g \in G$ tel que $\hat{g} = g^{-1}$:
L'application : $a = \hat{a} \times g$ est une involution qui vérifie K_1 sur G (I. 10).

L'involution barre de cette proposition est l'involution dilatée associée à $(G, \wedge, g)$; il est sous-entendu que cette dilatation s'effectue par rapport au neutre de G.

On peut résumer les constructions réciproques précédentes par le :

Théorème : Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les structures de contre-groupe ternaire et de groupe binaire à involution $\wedge$ avec un élément distingué g tel que : $\hat{g} = g^{-1}$.

Soit F un contre-groupe ternaire pour la loi : abc avec l'involution barre, notée $\wedge$, fixe sur $e \in F$. On lui associe le groupe binaire F_e à involution $\wedge$ (proposition 2) : $abc = a \times \hat{b}^{-1} \times c$.

Ceci étant nous définissons :
Une involution e-dilatée sur F est une involution dilatée associée à $(F_e, \wedge, g)$ dans les conditions de la proposition 3. S'il en est ainsi pour $\bar{a} = \hat{a} \times g$ alors la loi ternaire pour le contre-groupe ternaire engendré par $(F_e, -)$ s'écrit : $(a,b,c) \to a \times (\bar{b})^{-1} \times c = a \times (\hat{b} \times g)^{-1} \times c = a' \times \hat{b}^{-1} \times c = a'bc$ avec $a' = a \times g^{-1}$ soit $a' = a \top g \top e$ dans $(F)\mathcal{G}$. Ainsi :

Proposition 4 : Soit F un contre-groupe ternaire pour : abc, avec l'involution barre fixe sur e.
La loi ternaire sur un contre-groupe ternaire associé à F pour une involution e-dilatée est : $(a,b,c) \to a'bc$ où a' l'image de a par une translation dans $(F)\mathcal{G}$.

II. 6

Notation : Soit E et S des ensembles avec une application :
$(a,s) \in E \times S \to as \in E$ et $\wedge$ une involution sur E ; on note :
$K_2 : \widehat{as} = \hat{a}\, s$.
Dans ce cas on dit que l'involution $\wedge$ vérifie K_2 .

Lemme 1 : Si (F,S) est un contre-groupe ternaire à opérateur alors l'involution barre vérifie K_2 .

Preuve : Par I. 8 proposition : $as = (\bar{a}\, a\, a)s = \bar{a}s\, as\, as$.

Il en résulte que pour le contre-groupe ternaire F à opérateur S, $(-, \gamma_s)$ est un morphisme involutif.

Lemme 2 : Soit F un contre-groupe ternaire à involution $\wedge$ (I. 10) et S un ensemble qui opère sur F par : $(a,s) \to as$.
Si l'involution $\wedge$ vérifie K_2 alors S opère par : as, sur le contre-groupe ternaire engendré par $(F, \wedge)$ (I. 10).

Soit E le strict groupe ternaire engendré par $(Z/4, \oplus)$ et $S = \{2\}$:
S opère sur E par la multiplication dans $Z/4$; dans E l'involution $\hat{a} = a \oplus 2$ vérifie K_1 (I. 10 notation) mais ne vérifie pas K_2 .

Il résulte des lemmes 1 et 2 la :

Proposition : Soit F un contre-groupe ternaire et S un ensemble avec une application : $(a,s) \in F \times S \to as \in F$;
i) Si S opère sur F alors S opère sur $(F)\mathcal{G}$ (I. 10).
ii) Si S opère sur $(F)\mathcal{G}$ et vérifie K_2, alors S opère sur F.

Corollaire : La catégorie des contre-groupes ternaires à opérateur est équivalente à la catégorie des stricts contre-groupes ternaires à opérateur avec une involution vérifiant K_1 et K_2 .

Par ce corollaire et II. 2 théorème :

Théorème : La catégorie des contre-groupes ternaires à opérateur et pointés est équivalente à la catégorie des groupes binaires à opérateur avec une involution vérifiant K_1 et K_2.

Lemme 3 : Soit F un contre-groupe ternaire à opérateur S : Si S est fixe sur $e \in F$ alors S est fixe sur $\bar{e}$.

Preuve : $\bar{e}s = \overline{\bar{e}s} = \bar{e}$.

II. 7

Soit F un contre groupe ternaire pour la loi : abc et $E = (F)\mathcal{G}$.
Si l'ensemble S opère sur F par la loi : as alors (II. 6 proposition) S opère sur E par la même loi externe.
Notons $S_- = S \cup \{-\}$: S_- opère sur F et sur E par la même loi externe et :

Lemme 1 :

i) Barre commute avec tout $s \in S$.

ii) Barre est involutif.

Considérons, pour $e \in F$, la loi externe e-pointée de S_- sur E : par II. 3 proposition 2, les propriétés du lemme 1 sont conservées. Ainsi l'application : $\hat{a} = \bar{a} \top \bar{e} \top e$ est un morphisme involutif pour E et commute avec toute application : $a \to a * s = as \top es \top e$.
Par conséquent le contre groupe ternaire F' engendré par $(E, \wedge)$ est à opérateur S pour la loi : $a * s$.
On voit que $\wedge$ est l'involution e-pointée sur F (II. 5). On dit que la loi : $a * s$ est la loi externe e-pointée sur F et que F' est le contre-groupe ternaire à opérateur totalement e-pointé associé à F.

Proposition 1 : Soit F un contre-groupe ternaire à opérateur et h, k des éléments de F :
les contre-groupes ternaires à opérateur totalement h-pointé et k-pointé (respectivement) sont isomorphes.

Preuve : II. 4 proposition 2.

Une origine sur un contre-groupe ternaire à opérateur est un point fixe à la fois pour l'involution et pour l'opérateur.

Corollaire : Soit F un contre-groupe ternaire à opérateur S et possédant une origine k :
Quel que soit $e \in F$, le contre-groupe ternaire à opérateur totalement e-pointé est isomorphe à (F, S) et admet e pour origine.

Un groupe binaire à involution $\wedge$ et à opérateur S est un groupe binaire à involution $\wedge$ (II. 5) et muni de l'opérateur S qui vérifie K_2 (II. 6).
Les commentaires du début de paragraphe montrent que :

Proposition 2 : Soit F un contre-groupe ternaire à opérateur S et $e \in S$:
Le groupe binaire F_e muni de l'involution e-pointée $\wedge$ et de l'opérateur S pour la loi e-pointée, est un groupe binaire à involution $\wedge$ et à opérateur S.

Corollaire : Soit F un contre-groupe ternaire à opérateur S et possédant une origine k :
Le groupe binaire F_k muni de l'involution barre et de la même loi externe est un groupe binaire à involution barre et à opérateur S.

Réciproquement soit G un groupe binaire pour la loi : $\times$, de neutre e, à involution $\wedge$ et à opérateur S pour la loi : $a * s$, vérifiant K_2. Le strict contre-groupe ternaire E engendré par G est à opérateur $S_\wedge = S \cup \{\wedge\}$ pour la même loi externe (II. 2 lemme 1).

Lemme 2 : Le contre-groupe ternaire F' engendré par $(E, \wedge)$ est à opérateur S pour la loi : $a * s$ et admet e pour origine.

On dit encore que (F', S) est engendré par le groupe binaire G à involution $\wedge$ et à opérateur S.

Par le corollaire de la proposition 2 et ce lemme 2 :

Théorème 1 : Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les structures de contre-groupe ternaire à opérateur possédant une origine et de groupe binaire à involution et à opérateur.

Soit maintenant $(g_s)_{s \in S_\wedge}$ une famille de points de G : par II. 4 proposition 3, E est à opérateur $S_\wedge$ pour la loi externe : $as = a * s \,\mathbf{T}\, e \,\mathbf{T}\, g_s$, e-dilatée associée à la loi : $a * s$ et à la famille $(g_s)_{s \in S_\wedge}$. Appliquons II. 3 proposition 2 :

Lemme 3 : Les propriétés du lemme 1 sont encore vérifiées par cette loi e-dilatée si et seulement si dans G :
i) Pour tout $s \in S$: $\hat{g}_s \times g_\wedge = (g_\wedge * s) \times g_s$
ii) $\hat{g}_\wedge = g_\wedge^{-1}$.

Proposition 3 : Soit G un groupe binaire à involution $\wedge$ et à opérateur S pour la loi : $a * s$ et soit $(g_s)_{s \in S_\wedge}$ une famille de points de G pour laquelle les égalités du lemme 3 sont vérifiées :
L'application : $\bar{a} = \hat{a} \times g_\wedge$ est l'involution dilatée associée à $(G, \wedge, g_\wedge)$ (II. 5).
Par la loi externe : $as = (a * s) \times g_s$, S opère sur le contre-groupe ternaire F engendré par (G, -).

L'objet F de cette proposition est le contre-groupe ternaire à opérateur S, dilaté associé à $(G, \wedge, S, (g_s)_{s \in S_\wedge})$.
Les constructions précédentes montrent que :

Théorème : Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les structures de contre-groupe ternaire à opérateur S et de groupe binaire à involution $\wedge$ et à opérateur S avec une famille d'éléments distingués, indexés par $S_\wedge$ et vérifiant les égalités du lemme 3.

II. 8

Soit F un ensemble et S un binaire (I. 1) pour la loi : $(s,t) \to st$; le binaire S opère sur l'ensemble F s'il existe une application : $(a,s) \in F \times S \to as \in F$ telle que : $(as)t = a(st)$.

Lemme 1 : Si le binaire S avec le zéro ω opère sur l'ensemble F alors pour chaque $a \in F$, $a\omega$ est fixe pour S.

S opérant sur F, $r \in S$ est un zéro externe si l'application : $a \to ar$ est constante.

Lemme 2 : Si S opère sur F avec un zéro externe alors il ne peut exister plus d'un élément de F fixe pour S.

Des lemme 1 et 2 résulte la :

Proposition 1 : Soit S un binaire avec zéro, qui opère sur l'ensemble F : s'il existe un zéro externe alors F possède un unique point fixe pour S.

On remarquera que, dans ce cas, le zéro du binaire S est nécessairement un zéro externe.

Un binaire S opère sur un ternaire F s'il existe une application :
$(a,s) \in F \times S \to as \in F$ pour laquelle l'ensemble S opère sur le ternaire F (II. 1) et le binaire S opère sur l'ensemble F ; on a donc :
$(a \top b \top c)s = as \top bs \top cs$ et $(as)t = a(st)$.

Proposition 2 : Si le binaire S opère sur le contre-groupe ternaire F avec un zéro externe alors l'involution barre sur F possède un point fixe.

Preuve : II. 6 lemme 3 et II. 8 lemme 2.

Théorème : Si le binaire S avec zéro, opère sur le contre-groupe ternaire F avec un zéro externe alors F possède une unique origine (II. 7).

Preuve : Propositions 1 et 2 en remarquant que les points fixes respectifs sont les mêmes.

Soit (F, S) un objet de ce théorème : F étant d'origine k avec la loi ternaire : $a \top b \top c$ et la loi externe : as, nous allons résoudre le problème du changement de l'origine.
Soit $e \in F$ et F' le contre-groupe ternaire à opérateur S totalement e-pointé de II. 7 corollaire de la proposition 1 : F' est muni de la loi ternaire :
$(a,b,c) \to (a \top \bar{e} \top \bar{e}) \top b \top c$ (II. 5) et de la loi externe :
$a * s = as \top \overline{es} \top e$.

Lemme 3 : Le binaire S opère sur F'.

Preuve : Par II. 3 proposition 1 : $a * (st) = (a * s) * t$.

Par la preuve de II. 4 proposition 2, $(d_{ke}, \mathcal{J}_s)$ est un isomorphisme de ternaires à opérateur de (F, S) vers (F', S) et $\mathcal{J}_s$, application identique sur S, respecte évidemment la loi binaire.
Ainsi la notion de contre-groupe ternaire à opérateur totalement e-pointé associé à (F, S) permet ici de déplacer l'origine tout en conservant les propriétés de structure.

Ceci étant, pour les objets (F, S) du théorème on peut se limiter à la sous-catégorie dont les morphismes sont de la forme $(\theta, \mathcal{J}_s)$ avec θ respectant l'origine.
Par II. 6 théorème cette catégorie est équivalente à une catégorie de groupes binaires à involution et à opérateur...

II. 9

Un préanneau T au sens de P. Janin [JP] est un ternaire T doublement à opérateur T par la multiplication (binaire) à gauche et à droite. Ce ternaire T vérifie le système d'axiomes (voir I. 2) :

J_1 : m-commutatif

J_2 : $(xyz)tu = x(yut)z$

J_3 : m-simplifiable

J_4 : tripotent.

L'auteur établit les propriétés qui en font un strict groupe ternaire (I. 11).

Réciproquement, un strict groupe ternaire vérifie J_4 (I. 11 définition), J_1 (I. 11 proposition 1), J_3 (I. 6 proposition 2) et J_2 car $(x-y+z)-t+u = x-(y-u+t)+z$.

Notation : Considérant un ternaire, on note encore :

J_2' : $(xyz)tu = x(yzt)u$

J_2'' : $(xyz)tu = xy(ztu)$ (associativité faible)

J_2''' : conjonction de J_2' et J_2'' (associativité)

J_4' : $\forall\ x, \exists\ y : xyx = x$ (m-inversif)

J_5 : $xyy = x$

J_5' : $xyy = yyx = x$ (tout élément est inverse pour lui-même).

Proposition 1 : Dans un ternaire :

i) J_1 et J_2' impliquent J_2'' et J_2

ii) J_1, J_2 et J_2'' impliquent J_2'

iii) J_2 et J_3 impliquent J_2'' .

Preuve : i) $xy(ztu) = (utz)yx = u(tzy)x = x(yzt)u = (xyz)tu$;
ceci étant, un demi-groupe m-commutatif vérifie J_2 .

ii) $(xyz)tu = ut(xyz) = (utx)yz = u(tzy)x = x(yzt)u$

iii) $((xyz)tu)vw$ s'écrit d'une part : $x(yu(twv))z$ et d'autre part $x((yut)wv)z$, d'où par J_3 : $yu(twv) = (yut)wv$.

Corollaire 1 : Sous J_1 et J_3 , J_2 et J_2' sont équivalents et impliquent J_2'' .

Corollaire 2 : Dans un ternaire les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) J_1, J_2, J_3

ii) J_1, J_2', J_3

iii) Demi-groupe ternaire m-commutatif et simplifiable.

Théorème 1 : Pour un ternaire les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Strict groupe ternaire

ii) J_1, J_2, J_3, J_4

iii) J_1, J_2', J_3, J_4

iv) J_2'', J_3, J_4

v) J_2'', J_5'

vi) J_1, J_2', J_5

vii) J_1, J_2'', J_5 .

Preuve :

i) implique ii) : commentaires du début,

ii) implique iii) : Corollaire 2,

iii) implique iv) : Corollaire 1,

iv) implique v) : I. 6 proposition 2 (par J_4 : $\bar{y} = y$)

v) implique vi) : I. 11 proposition 1

vi) implique vii) : Proposition 1

vii) implique i) : I. 9 compte tenu de J_1 .

De même on montre facilement :

Théorème 2 : Pour un ternaire les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) J_1, J_2, J_3, J'_4

ii) J_1, J'_2, J_3, J'_4

iii) Groupe ternaire m-commutatif.

II. 10

Pour toute la suite, $(\Omega, \dotplus, .)$ est un anneau d'unité 1 et de zéro ω.

D'autre part on rappelle (I. 11 Notation 1) que la loi ternaire sur un demi-groupe ternaire m-commutatif est généralement notée : $a \perp b + c$.

Définition : F est un Ω-prémodule si :

i) F est groupe ternaire m-commutatif

ii) F est muni de la loi externe : $(a, \alpha) \in F \times \Omega \to a\alpha \in F$

vérifiant :

Ω_1 : $(a \perp b + c)\alpha = a\alpha \perp b\alpha + c\alpha$

Ω_2 : $a(\alpha \dotplus \beta) \perp b(\alpha \dotplus \beta) + c = a\alpha + a\beta \perp b\alpha \perp b\beta + c$

Ω_3 : $(a\alpha)\beta = a(\alpha\beta)$

Ω_4 : $a\,1 = a$

Par Ω_1 et Ω_3 le binaire multiplicatif Ω opère sur le ternaire F (II. 8).
On remarquera que dans Ω_2, c peut être remplacé par a ou par b.

Lemme 1 : Pour tout Ω - prémodule, le zéro ω de Ω est un zéro externe (II. 8).

Preuve : Par Ω_2 : $a\alpha \perp \bar{b}\alpha + c = a\alpha + a\omega \perp \bar{b}\alpha \perp \bar{b}\omega + c$ soit avec K_2 (II. 6) $a\omega = b\omega$ pour tous a,b de F.

Il résulte alors de II. 8 théorème 1a :

Proposition 1 : Tout Ω-prémodule possède une unique origine.

Corollaire : Pour tout Ω -prémodule l'involution barre a un point fixe.

Lemme 2 : Soit G un Ω -module avec l'involution $\wedge$; les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) $\wedge$ vérifie K_1 et K_2 (pour Ω)
ii) $\wedge$ est un morphisme de Ω -module.

Preuve : $\wedge$ est fixe sur le zéro de G.

Un Ω -module est à involution $\wedge$ lorsque $\wedge$ est un automorphisme involutif ; en particulier tout Ω -module à involution $\wedge$ est un groupe binaire à involution $\wedge$ et à opérateur Ω (II. 7).

Lemme 3 : Soit F un Ω - prémodule d'origine k :
F_k muni de : $a \oplus b = a \perp k + b$ et de $a\,\alpha$ est un Ω-module à involution barre.

Preuve : On complète II. 7 corollaire de la proposition 2 par :

$$\begin{aligned} a(\alpha \dot{+} \beta) &= a(\alpha \dot{+} \beta) \perp k(\alpha \dot{+} \beta) + k \\ &= a\,\alpha + a\,\beta \perp k \\ &= a\,\alpha \oplus a\,\beta \ . \end{aligned}$$

Réciproquement :

Lemme 4 : Soit G un Ω-module à involution $\wedge$:
Le contre-groupe ternaire F à opérateur Ω engendré par $(G, \wedge, \Omega)$ (II. 7) est un Ω-prémodule.

Preuve : On vérifie Ω_2 , c'est-à-dire :

$$a(\alpha \dot{+} \beta) \ominus \widehat{b(\alpha \dot{+} \beta)} \oplus c = a\,\alpha \oplus a\,\beta \ominus \widehat{b\,\alpha} \ominus \widehat{b\,\beta} \oplus c$$

Il résulte des lemmes 3 et 4 la :

Proposition 2 : Soit F un groupe ternaire m-commutatif, $k \in F$, avec $\bar{k} = k$, et une application : $(a, \alpha) \in F \times \Omega \to a\,\alpha \in F$: F est un Ω-module d'origine k pour $a\,\alpha$ si et seulement si F_k est un Ω-module à involution barre pour $a\,\alpha$.

Théorème 1 (du changement d'origine) : Soit F un Ω-prémodule d'origine k et $e \in F$:
L'ensemble F muni de la nouvelle loi ternaire :
$(a,b,c) \to a \perp b + c \perp \bar{e} + \bar{e}$,
et de la nouvelle loi externe :
$a * \alpha = a\,\alpha \perp \bar{e}\,\alpha + e$,
est un Ω-prémodule d'origine e, isomorphe au Ω-prémodule initial.

Preuve : Compte tenu de II. 8 il suffit de montrer que le contre-groupe ternaire F' à opérateur Ω totalement e-pointé associé à F est un Ω-prémodule. Comme F' est engendré par le groupe binaire F_e à involution e-pointée et à opérateur Ω pour la loi externe : $a * \alpha$, il suffit de montrer (lemme 4) que F_e est un Ω-module. Or :

$$\begin{aligned} a * (\alpha \dot{+} \beta) &= a(\alpha \dot{+} \beta) \perp \bar{e}(\alpha \dot{+} \beta) + e \\ &= a\,\alpha \perp \bar{e}\,\alpha + e \perp \bar{e} + a\,\beta \perp \bar{e}\,\beta + e \\ &= a * \alpha \oplus a * \beta \ . \end{aligned}$$

On remarquera que la loi ternaire n'est pas modifiée dans ce changement d'origine si et seulement si $\bar{e} = e$.

Un morphisme de Ω-modules à involution est un morphisme de Ω-modules qui respecte l'involution. On note $\widehat{\mathrm{Mod}}_\Omega$ la catégorie des Ω-modules à involution.
Soit $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{rémod}_\Omega$ la catégorie des Ω-prémodules avec les morphismes θ suivants : θ est une application de F dans F' respectant (l'origine) la loi ternaire, et vérifiant : $(a\,\alpha)\,\theta = (a)\,\theta\,\alpha$.

Théorème 2 : $\dot{\mathrm{P}}\mathrm{rémod}_\Omega$ et $\widehat{\mathrm{Mod}}_\Omega$ sont des catégories équivalentes.

Preuve : On conserve les applications sous-jacentes aux morphismes et on applique aux objets les constructions réciproques des lemmes 3 et 4.

II. 11

Convention : Soit F un groupe ternaire m-commutatif et α un entier relatif. L'expression $+\alpha_0$ a dans un assemblage comportant $+$, $\perp$, et des éléments de F, représente :

$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{\alpha \text{ fois}}$ si α est un entier positif,

.../...

Le symbole vide si α est l'entier nul

$\perp[(-\alpha)_o \bar{a}]$ si α est un entier négatif.

Soit Z l'anneau des entiers relatifs : si G est un groupe binaire commutatif on sait qu'il existe une unique loi externe pour laquelle G est un Z-module.

Soit F un groupe ternaire m-commutatif :
Par II. 10 corollaire de la proposition 1, pour que F puisse être muni d'une structure de Z-prémodule il est nécessaire que l'involution barre ait un point fixe.
Ainsi il existe des groupes ternaires m-commutatifs qui ne sont pas des Z-prémodules.

Proposition : Sur le groupe ternaire m-commutatif F, avec $\bar{k} = k \in F$, il existe une unique structure de Z-prémodule d'origine k.
Elle est définie par la loi externe :
$(a, \alpha) \in F \times Z \rightarrow (\alpha_o a \perp (\alpha \dot{-} 1)_o k) \in F$

Preuve : II. 10 Proposition 2.

Nous allons maintenant définir une structure plus générale que celle de Ω-prémodule.

On rappelle que Ω est un anneau d'unité 1 et de zéro ω .

III. 1

Définition : F est un Ω-espace affine s'il existe une application de $F^2 \times \Omega \times F$ dans F, appelée opération affine, notée (a,b,α,c) et vérifiant :

A_1 : F est un groupe ternaire m-commutatif pour :

$$a \perp b + c = (a,b,1,c)$$

A_2 : $(a,b,\alpha \dot{+} \beta,c) = (a,b,\alpha,(a,b,\beta,c)$

A_3 : $((a,b,\alpha,c),d,\beta,e) = (a,b,\alpha\beta,(c,d,\beta,e))$

Soit G un Ω-module ; si on pose : $(a,b,\alpha,c) = a\,\alpha \ominus b\,\alpha \oplus c$ alors A_1, A_2, A_3 sont vérifiés.

Soit G un groupe binaire commutatif sur lequel opère Ω en vérifiant les axiomes de Ω-module sauf : $(a\alpha)\beta = a(\alpha\beta)$ (resp. $a(\alpha \dot{+} \beta) = a\,\alpha \oplus a\,\beta$) : G muni de : $a\,\alpha \ominus b\,\alpha \oplus c$ vérifie A_1 et A_2 mais pas A_3 (resp. A_1 et A_3 mais pas A_2).

Soit F un ensemble et $k \in F$: pour $(a,b,\alpha,c) = k$, A_2 et A_3 sont vérifiés mais pas A_1.

Un strict Ω-espace affine est un Ω-espace affine pour lequel le groupe ternaire sous-jacent est strict.

Comme A_3 implique : $((a,b,1,c),d,1,e) = (a,b,1,(c,d,1,e))$ c'est-à-dire J_2'' pour la loi ternaire $(a,b,1,c)$, un strict Ω-espace affine peut encore être caractérisé par : A_2, A_3 et :

A_1' : $(a,b,1,c) = (c,b,1,a)$ et $(a,a,1,b) = b$.

Soit F un Ω-espace affine ; l'involution barre : $a \to \bar{a}$ (I. 8 définition 2) sur le groupe ternaire m-commutatif de l'axiome A_1 est simplement appelée : l'involution barre sur F.

Par I. 9 lemme 1, un Ω-espace affine est strict si et seulement si son involution barre est l'application identique.

Lemme : Soit F un Ω-espace affine pour l'opération affine (a,b,α,c) et $\wedge$ une involution sur F.

L'ensemble F muni de l'application :

$[a,b,\alpha,c] \in F^2 \times \Omega \times F \to (a,\hat{b},\alpha,c) \in F$,

est un Ω-espace affine si et seulement si $\wedge$ vérifie K_1 sur le ternaire F (I. 10 Notation).

Preuve : Par I. 10 lemme 1 la condition est nécessaire. Si $\wedge$ respecte K_1 alors l'axiome A_1 résulte de I. 10 lemme 1. On vérifie A_2 et A_3.

Le Ω-espace affine de ce lemme pour l'opération affine (a,b,α,c) est dit engendré par $(F, \wedge)$.

Si F' est engendré par $(F, \wedge)$ alors $\wedge$ vérifie K_1 sur F' et F est engendré par $(F', \wedge)$.

En particulier nous notons $(F)\mathcal{G}$ le strict Ω-espace affine engendré par $(F, -)$.

Ainsi :

Proposition : Tout Ω-espace affine peut être engendré par un strict Ω-espace affine avec une involution vérifiant K_1.

III. 2

On considère un strict Ω-espace affine E :

Proposition 1 : $(a,b,\omega,c) = c$

Preuve : $(a,b,1,c) = (a,b,1,(a,b,\omega,c))$ A_2, A_1

Lemme 1 : $(a,b,-1,c) = (b,a,1,c)$

Preuve : $c = (a,b,1,(a,b,-1,c))$ Proposition 1, A_2, A_1

Lemme 2 : $(a,b,\alpha,c) = (d,(a,b,-\alpha,d),1,c)$

Preuve :
$$\begin{aligned}(d,(a,b,-\alpha,d),1,c) &= ((a,b,-\alpha,d),d,-1,c) && \text{Lemme 1}\\ &= (a,b,\alpha,(d,d,-1,c)) && A_3\\ &= (a,b,\alpha,(d,d,1,c)) && \text{Lemme 1}\\ &= (a,b,\alpha,c) && A_1\end{aligned}$$

Proposition 2 : $(a,a,\alpha,b) = b$

Preuve :
$$\begin{aligned}b &= ((a,a,-\alpha,b)\ ,\ (a,a,-\alpha,b),1,b)\\ &= (a,a,-\alpha,\ (b,(a,a,-\alpha,b),1,b)) && A_3\\ &= (a,a,-\alpha,\ (a,a,\alpha,b)) && \text{Lemme 2}\\ &= ((a,a,-1,a),a,\alpha,b) && A_3\\ &= (a,a,\alpha,b) && \text{Lemme 1, } A_1\end{aligned}$$

Proposition 3 : $(a,b,-\alpha,c) = (b,a,\alpha,c)$

Preuve : $(a,b,-\alpha,c) = (a,b,-\alpha,(c,c,\alpha,c))$ Proposition 2

$= ((a,b,-1,c),c,\alpha,c)$ A_3

$= ((b,a,1,c),c,\alpha,c)$ Lemme 1

$= (b,a,\alpha,(c,c,\alpha,c))$ A_3

$= (b,a,\alpha,c)$ Proposition 2

Lemme 3 : $(a,b,\alpha,c) = ((a,b,\alpha,d),d,1,c)$

III. 3

Lemme 1 : Soit E un strict Ω-espace affine et $k \in E$:

L'ensemble E, muni des lois :

$a \oplus b = a - k + b$ et $a * \alpha = (a,k,\alpha,k)$,

est un Ω-module.

Preuve : Par I. 11, $(E, \oplus)$ est un groupe commutatif ; on a ensuite :

$(a \oplus b) * \alpha = ((a,k,1,b),k,\alpha,k)$

$= (a,k,\alpha,(b,k,d,k))$ A_3

$= ((a,k,\alpha,k),k,1,(b,k,\alpha,k))$ III. 2 Lemme 3

$= a * \alpha \oplus b * \alpha$

$a * (\alpha \dot{+} \beta) = (a,k,\alpha \dot{+} \beta,k)$

$= (a,k,\alpha,(a,k,\beta,k))$ A_2

$= ((a,k,\alpha,k),k,1,(a,k,\alpha,k))$ III. 2 Lemme 3

$= a * \alpha \oplus a * \beta$

$(a * \alpha) * \beta = ((a,k,\alpha,k),k,\beta,k)$

$= (a,k,\alpha\beta,(k,k,\beta,k))$ A_3

$= (a,k,\alpha\beta,k)$ III. 2 Proposition 2

$= a * (\alpha\beta)$

$a * 1 = a - k + k = a$

Notation : Soit F un Ω-espace affine et $k \in F$: on note F_k le module de ce lemme appliqué à $(F)\mathcal{G}$.

Si $E = (F)\mathcal{G}$ on a donc $F_k = E_k$.

F étant muni de l'opération affine (a,b,α,c), qui détermine par A_1 la loi ternaire $a \perp b + c$, la somme sur F_k est $a \oplus b = a \perp \bar{k} + b$ et la loi externe sur F_k est : $a * \alpha = (a,\bar{k},\alpha,k)$.

On sait (I. 10) que l'involution barre vérifie K_1 sur $(F_k, \oplus)$.

Lemme 2 : Soit $(G, \oplus)$ un Ω-module avec une involution $\wedge$ vérifiant K_1. L'ensemble G muni de l'application de $G^2 \times \Omega \times G$ dans G définie par $a\,\alpha \ominus \hat{b}\,\alpha \oplus c$ est un Ω-espace affine.

Preuve : A_1 résulte de I. 10. On vérifie A_2 et A_3.

Soit G un Ω-module avec une involution $\wedge$ qui vérifie K_1 ; le Ω-espace affine du lemme 2 est dit engendré par $(G, \wedge)$.
Lorsque $\wedge$ est l'application identique, on dit simplement : "le (strict) Ω-espace affine G".

Proposition : Tout Ω-espace affine peut être engendré par un Ω-module avec une involution vérifiant K_1.

Preuve : Soit F un Ω-espace affine, $k \in F$ et $E = (F)$ muni de l'opération affine (a,b,α,c) ; dans le Ω-module E_k :

$$\begin{aligned}
a * \alpha \ominus b * \alpha \oplus c &= a * \alpha - b * \alpha + c \\
&= ((a,k,\alpha,k), (b,k,\alpha,k),1,c) \\
&= (a,k,\alpha,(k,(b,k,\alpha,k),1,c)) && A_3 \\
&= (a,k,\alpha,(b,k,-\alpha,c)) && \text{III. 2 Lemme 2} \\
&= (a,k,\alpha,(k,b,\alpha,c)) && \text{III. 2 Proposition 3} \\
&= ((a,k,1,k),b,\alpha,c) && A_3 \\
&= (a,b,\alpha,c)
\end{aligned}$$

Par conséquent l'opération affine sur F : $[a,b,\alpha,c] = (a,\bar{b},\alpha,c)$ est obtenue par $a * \alpha \ominus \bar{b} * \alpha \oplus c$.

La preuve de cette proposition montre que le Ω-espace affine engendré par $(F_k, -)$ est F. Réciproquement on voit que si G est un Ω-module de zéro k avec l'involution $\wedge$ vérifiant K_1 et G' le Ω-espace affine engendré par $(G, \wedge)$ alors G'_k est identique à G.

III. 4

Définition : Un morphisme de Ω-espaces affines de F dans F' est une application θ de F dans F' qui vérifie :
$(a,b,\alpha,c)\,\theta = ((a)\,\theta, (b)\,\theta, \alpha, (c)\,\theta)$.

Tout morphisme de Ω-espaces affines est un morphisme pour les ternaires sous-jacents (on prend $\alpha = 1$). De I. 8 Corollaire 1 de la proposition, résulte le :

Lemme 1 : Tout morphisme de Ω-espaces affines respecte l'involution barre.

Un Ω-espace affine avec un élément distingué k est un Ω-espace affine pointé. Un morphisme de Ω-espaces affines pointés respecte l'opération affine et l'élément distingué.

Lemme 2 : Soit G et G' des Ω-modules et θ une application de G dans G'. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) θ est un morphisme de Ω-modules (application linéaire)
ii) θ est un morphisme de Ω-espaces affines pointés sur le zéro.

On appelle naturellement morphisme pour des Ω-modules avec une involution, une application linéaire qui respecte l'involution.

Théorème : La catégorie des Ω-espaces affines pointés est équivalente à la catégorie des Ω-modules avec une involution vérifiant K_1.

Preuve : On applique aux objets les constructions réciproques de III. 3 et on conserve les applications sous-jacentes aux morphismes.

Corollaire : La catégorie des stricts Ω-espaces affines pointés est équivalente à la catégorie des Ω-modules.

Soit F un Ω-espace affine : une translation sur F est une translation sur le strict groupe ternaire sous-jacent (I. 9 définition 2). Ainsi la translation qui applique k sur h est l'application : $\mathscr{C}_{kh} : a \to a \perp \bar{k} + h$.
On vérifie qu'une translation $\mathscr{C}_{kh}$ sur F est un morphisme pour le Ω-espace affine F si et seulement si : $\mathscr{C}_{kh} = \mathscr{C}_{\bar{k}\bar{h}}$.

On en déduit que toute translation sur le Ω-espace affine F est un morphisme si et seulement si l'involution barre sur F est déterminée par : $\bar{a} = a \oplus h$ avec $h \oplus h = k$ dans F_k.

Lemme 3 : Toute translation sur un strict Ω-espace affine est un automorphisme.

Proposition 1 : Soit F un Ω-espace affine :

Quels que soient k et h de F, les Ω-modules F_k et F_h sont isomorphes.

Preuve : L'isomorphisme $\mathscr{E}_{kh}$ de stricts Ω-espaces pointés de $((F)\mathcal{G}, k)$ vers $((F)\mathcal{G}, h)$ induit un isomorphisme de Ω-modules de F_k vers F_h (corollaire).

Soit T le groupe binaire des translations de F (I. 9 théorème 2) ; on sait que l'application : $a \in F_k \to \mathscr{E}_{ka} \in T$ est un isomorphisme de groupes binaires. Par transport de structure, T est un Ω-module : la loi externe, indépendante de k (proposition 1), associe à $(\mathscr{E}_{uv}, \alpha)$ la translation : $a \to (v, \bar{u}, \alpha, a)$.

Proposition 2 : L'ensemble T des translations d'un Ω-espace affine F est canoniquement un Ω-module isomorphe à F_k.

Cette propriété sera utilisée au chapitre VII pour faire le lien avec la notion classique d'espace affine.

III. 5

Définition : Soit F un Ω-espace affine pour l'opération affine (a,b,α,c) et S un ensemble :

S opère sur F s'il existe une application :

$(a,s) \in F \times S \to as \in F$ telle que

$(a,b,\alpha,c)s = (as, bs, \alpha, cs)$.

Dans ce cas on dit que le Ω-espace affine F est à opérateur S.

Exemple : Tout Ω-module à opérateur est un Ω-espace affine à opérateur fixe sur le zéro.

Lemme 1 : Si F est un Ω-espace affine à opérateur S alors l'involution barre vérifie K_2 : $\overline{as} = \bar{a}\, s$ (II. 6 Notation).

Preuve : II. 6 Lemme 1 puisque F est en particulier un contre-groupe ternaire à opérateur S.

Soit (F,S) et (F',S') des Ω-espaces affines à opérateur : (θ, θ_S) est un morphisme de Ω-espaces affines à opérateur si θ est un morphisme de Ω-espaces affines de F dans F' et θ_S une application de S dans S' tels que : $(as)\,\theta = (a)\,\theta\ (s)\,\theta_S$.
Ainsi (θ, θ_S) est encore un morphisme de contre-groupe ternaire à opérateur (II. 1).
Si de plus F et F' sont munis d'une involution, "(θ, θ_S) est un morphisme" impose à θ de respecter l'involution.

On vérifie que :

Lemme 2 : Soit F un Ω-espace affine, $E = (F)\,\mathfrak{g}$ et S un ensemble :
i) Si S opère sur F alors, avec la même loi externe, S opère sur E.
ii) Si S opère sur E et l'involution barre vérifie K_2 alors, avec la même loi externe, S opère sur F.

Par ce lemme et compte tenu de III. 1 Proposition et de III. 4 Lemme 1 :

Théorème : La catégorie des Ω-espaces affines à opérateur est équivalente à la catégorie des stricts Ω-espaces affines à opérateur munis d'une involution vérifiant K_1 et K_2.

III. 6

Soit E un strict Ω-espace affine, H' (resp. H) le demi-groupe binaire des endomorphismes du strict groupe ternaire (resp. Ω-espace affine) E.
Comme H est sous-demi-groupe de H' et comme toute translation sur E est un élément de H' (III. 4 Lemme 3), on peut utiliser les résultats de II. 3 et adapter ici leurs applications, explicités dans II pour les contre-groupes ternaires à opérateur.

Commençons par II. 4 :

Soit E un strict Ω-espace affine à opérateur S par as : la loi externe e-pointée sur (E,S) est : (a,s) → as - es + e. Avec cette loi externe S opère sur E et il est fixe sur e ; la structure obtenue est indépendante du choix de e ∈ E.

Lemme : Soit S un ensemble :

i) Si S opère sur le strict Ω-espace affine E et est fixe sur k ∈ E alors S opère par la même loi externe sur le Ω-module E_k.

ii) Si S opère sur le Ω-module G alors S opère par la même loi externe sur le strict Ω-espace affine engendré par G.

Soit maintenant E un strict Ω-espace affine à opérateur S par a * s, fixe sur e ∈ E, et $(e_s)_{s \in S}$ une famille de points de E : la loi externe e-dilatée associée à la loi a * s et à la famille $(e_s)_{s \in S}$ est : (a,s) → a * s - e + e_s.

Les constructions précédentes étant réciproques, on peut dire, compte tenu du lemme :

Théorème 1 : Il existe une correspondance bijective canonique entre les structures de strict Ω-espace affine à opérateur et de Ω-module à opérateur avec une famille d'éléments distingués indexée par l'opérateur.

Adaptons les résultats de II. 5 :

Soit F un Ω-espace affine et E = (F) $\mathcal{G}$: l'involution e-pointée sur F est : $a \to \hat{a} = \bar{a} \perp e + e$. Le Ω-espace affine F' engendré par (E, ∧) est le Ω-espace affine e-pointé associé à F ; cette structure est indépendante du choix de e ∈ E.

Soit F un Ω-espace affine : si l'involution barre est fixe sur k alors c'est un automorphisme pour le groupe binaire F_k (II. 5 Proposition 2) ; ce n'est pas nécessairement un morphisme de Ω-module. Soit G un Ω-module avec un automorphisme involutif ∧ pour le groupe binaire sous-jacent : ∧ vérifiant K_1, (G, ∧) engendre un Ω-espace affine pour lequel l'involution barre a un point fixe.

Soit maintenant G un Ω-module, ∧ un automorphisme involutif du groupe binaire G et g un élément distingué de G tel que $\hat{g} = g^{-1}$: l'involution dilatée associée à (G, ∧, g) est : $a \to \hat{a} \oplus g$; elle vérifie K_1 sur G.

Théorème : Il existe une correspondance ~~biunivoque~~ canonique entre les structures de Ω-espace affine et de Ω-module avec un automorphisme involutif $\wedge$ de groupe binaire et un élément distingué g tel que $\hat{g} = g^{-1}$.

Considérons enfin le paragraphe II. 7 :
Soit F un Ω-espace affine à opérateur S par as et $E = (F)$. Le Ω-espace affine F' e-pointé associé à F et muni de la loi externe e-pointée sur E est le Ω-espace affine à opérateur totalement e-pointé associé à F ; cette structure est indépendante du choix de $e \in F$. F'_e est un Ω-module à opérateur S avec un automorphisme involutif de groupe binaire vérifiant K_2 (pour S).
Réciproquement à partir d'un Ω-module G à opérateur S, muni de l'involution $\wedge$ et la famille de points $(g_s)_{s \in S_\wedge}$ on peut définir dans les conditions précisées en II. 7 une involution dilatée et une loi externe dilatée qui déterminent une structure de Ω-espace affine à opérateur S.

Théorème 3 : Il existe une correspondance ~~biunivoque~~ canonique entre les structures de Ω-espace affine à opérateur S et de Ω-module à opérateur S avec un automorphisme involutif $\wedge$ de groupe binaire vérifiant K_2 et une famille d'éléments distingués indexés par $S_\wedge$ et vérifiant les égalités de II. 7 Lemme 3.

III. 7

Soit F un groupe ternaire m-commutatif : on dit que c'est un Ω-espace affine s'il existe sur F une opération affine (a,b,α,c) pour laquelle $(a,b,1,c)$ est la loi ternaire initiale.

Lemme : Soit F un groupe ternaire m-commutatif, E le strict groupe ternaire (F) § (I. 10) et $F_k = E_k$ le groupe binaire associé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) F est un Ω-espace affine
ii) E est un Ω-espace affine
iii) F_k est un Ω-module.

Preuve : i) et ii) sont équivalentes : III. 1
ii) et iii) sont équivalentes : III. 3 .

Définition : Un Ω-espace affine est régulier s'il vérifie K_3 :

$\overline{(a,b,\alpha,c)} = (\bar{a},\bar{b},\alpha,\bar{c})$.

K_3 est équivalent à : "l'involution barre est un automorphisme sur F".

Tout strict Ω-espace affine est régulier. Voici un Ω-espace affine non régulier :

Exemple : Soit C le corps des complexes et $\wedge$ l'involution :
si $a = x + iy$ avec x et y réels alors $\hat{a} = x - iy$.
$\wedge$ vérifie K_1 (c'est un morphisme pour le groupe additif sous-jacent) donc C est un C-espace affine pour $a\ \alpha \ominus \hat{b}\ \alpha \oplus c$.
Mais $\overline{(i,0,i,0)} = -1$ alors que $(\hat{i},\hat{0},i,\hat{0}) = 1$.

Soit F un Ω-espace affine : F est régulier si et seulement si l'involution barre est un automorphisme pour le strict Ω-espace affine $(F)\mathcal{G}$; il en résulte la

Proposition : Le Ω-espace affine F est régulier si et seulement si le Ω-module F_k muni de l'involution k-pointée (III. 6) est un Ω-module à involution (II. 10).

Alors compte tenu de II. 10 Proposition 2 on obtient le :

Corollaire : Soit F un groupe ternaire m-commutatif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) F est un Ω-prémodule (II. 10)
ii) Barre a un point fixe et F un Ω-espace affine régulier.

Soit Z l'anneau des entiers relatifs ; on sait (I. 11) que la propriété : "Z-prémodule" ne peut pas être attribuée à n'importe quel groupe ternaire m-commutatif.

Théorème : Tout groupe ternaire m-commutatif est un Z-espace affine régulier.

Preuve : Soit F un groupe ternaire m-commutatif : remplaçant barre par l'involution k-pointée $\wedge$ (II. 5) on obtient un Z-prémodule (II. 11 Proposition) donc un Z-espace affine régulier (corollaire ci-dessus).
On retrouve F en considérant barre comme involution dilatée de $\wedge$ (III. 6).

Soit F un groupe ternaire m-commutatif et $k \in F$: le Z-espace affine F étant engendré par le Z-module F_k avec l'involution barre (III. 3) l'opération affine sur F est : $\alpha \circ a \ominus \alpha \circ \bar{b} \oplus c$ (II. 11 convention) soit encore $\alpha \circ a \dot{+} \alpha \circ b + c$.

III. 8

Lemme : Dans un strict Ω-espace affine E la propriété suivante est indépendante de k :
$(a,k,\alpha,k) := k$ implique $a = k$ ou $\alpha = \omega$.

Preuve : $(a,h,\alpha,h) = h$ est équivalent à :
$(a,h,\alpha,h) - h + k = k = (a-h+k,k,\alpha,k)$.

Définition : Un strict Ω-espace affine qui vérifie la propriété suivante :
$(a,k,\alpha,k) = k$ implique $a = k$ ou $\alpha = \omega$,
est sans torsion.

Proposition : Le strict Ω-espace affine E est sans torsion si et seulement si le Ω-module E_k est sans torsion.

III. 9

Lemme 1 : Soit E un strict Ω-espace affine :
La propriété : $(a,k,\alpha,k) = k$ pour tout $a \in E$, est indépendante de k.

Preuve : $(a,h,\alpha,h) = (a,k,\alpha,k) - (h,k,\alpha,k) + h = h$.

Définition : Un strict Ω-espace affine E est fidèle si $(a,k,\alpha,k) = k$ pour tout $a \in E$ implique $\alpha = \omega$.

Proposition : Le strict Ω-espace affine E est fidèle si et seulement si le Ω-module E_k est fidèle.

Par le lemme précédent l'annulateur de E_k dans Ω est indépendant de k : on dit que c'est l'annulateur de E et on le note $\mathrm{Ann}(E)$.
$\mathrm{Ann}(E)$ est un idéal bilatère de Ω ; soit Ω' l'anneau quotient de Ω par $\mathrm{Ann}(E)$.

Lemme 2 : E est canoniquement un strict Ω'-espace affine fidèle.

Lemme 3 : Soit Ω'' un anneau unitaire et E un strict Ω''-espace affine.
Si E est fidèle alors Ω'' est associatif.

Preuve : On a dans E_k et pour tout a, tous α, β, γ :
$a * ((\alpha\beta)\gamma) = ((a * \alpha) * \beta) * \gamma = a * (\alpha(\beta\gamma))$.

Les lemmes 2 et 3 permettent si nécessaire de remplacer Ω par Ω' associatif.

III. 10

Définition : Soit E un strict Ω-espace affine :
L'application $\mathcal{D} : x \in E \to (x,a,\alpha,b) \in E$, est la dilatation de rapport α qui applique a sur b.

Pour $\alpha = 1$ on retrouve la translation qui applique a sur b (III. 4).
Pour $\alpha = -1$ on parle de symétrie (comme en I. 9 Définition 2).
Il résulte de III. 5 Théorème que pour tout strict groupe ternaire E on peut considérer les dilatations de rapport α, avec $\alpha \in Z$; ceci permet d'élargir le point de vue de I. 11.

Lemme 1 : Si la dilatation $\mathcal{D}$ de la définition applique c sur d alors $\mathcal{D}$ est encore l'application : $x \to (x,c,\alpha,d)$.

Preuve : Dans le Ω-module E_k :
$x * \alpha \ominus c * \alpha \oplus d = x * \alpha \ominus c * \alpha \oplus c * \alpha \ominus a * \alpha \oplus b$.

Soit D l'ensemble des dilatations de E muni de la composition des applications.

Proposition 1 : D est un demi-groupe unitaire avec un ensemble de zéros à droite équipotent à E.

Preuve : Soit $\mathcal{D} : x \to (x,a,\alpha,b)$ et $\mathcal{D}' : x \to (x,b,\alpha',c)$.
La composée de $\mathcal{D}$ puis $\mathcal{D}'$ est : $x \to (x,a,\alpha\alpha',c)$.
$\mathcal{D}'$ est un zéro à droite si et seulement si c'est l'application constante : $x \to c$.

Une homothétie de E est une dilatation qui possède un point fixe appelé centre.
Par le Lemme 1, l'homothétie de rapport α, fixe sur $k \in E$ est l'application :

$x \to (x,k,\alpha,k)$ c'est-à-dire $x \to x * \alpha$, dans le Ω-module E_k.
En particulier on voit que :

Lemme 2 : Si le strict Ω-espace affine E est sans torsion (III. 8) alors toute dilatation différente de l'identité possède au plus un point fixe.

Soit $k \in E$: par la proposition 1, le composé $\mathcal{HL}$ d'une homothétie de centre k par une translation est une dilatation. Réciproquement :

Proposition 2 : Toute dilatation de E s'écrit de façon unique comme composée d'une homothétie de centre k par une translation.

Preuve : Soit h l'image de k par la dilatation $\mathcal{D}$: (x,k,α,h) s'écrit de façon unique : $x * \alpha \oplus h$ dans E_k.

On sait que les translations sont des isomorphismes du strict Ω-espace affine E (III. 4 Lemme 2).
Par cette proposition et par III. 4 Lemme 1, une dilatation $\mathcal{D} = \mathcal{HL}$ est un morphisme pour le strict Ω-espace affine E si et seulement si $\mathcal{H}$ est un morphisme pour le Ω-module E_k. C'est le cas par exemple lorsque le rapport est central dans Ω.
On vérifie, soit directement, soit sur la décomposition $\mathcal{D} = \mathcal{HL}$ que toute dilatation du strict Ω-espace affine E est un morphisme pour le strict groupe ternaire sous-jacent.
En général une dilatation n'est pas une homothétie ; cependant :

Proposition 3 : Si $(1 \dot{-} \alpha)$ est inversible dans Ω alors toute dilatation de rapport α possède un unique centre.

Preuve : Soit $\mathcal{D}$ la dilatation : $x' = x * \alpha \oplus h$, écrite dans E_k.
Si e est fixe pour $\mathcal{D}$ et ε est l'inverse de $(1 \dot{-} \alpha)$ alors nécessairement : $e = h * \varepsilon$.
Réciproquement avec $\alpha = 1 \dot{-} (1 \dot{-} \alpha)$ on voit que $h * \varepsilon$ est fixe pour $\mathcal{D}$.
En particulier dans tous les cas la dilatation : $x' = (x,a,2,b)$ admet un unique centre : $a + a - b$.

Corollaire : Si Ω est un corps alors toute dilatation de E qui n'est pas une translation admet un unique centre.

Soit $k \in E$ et H l'anneau associatif unitaire des homothéties du Ω-module E_k : les éléments de H sont les dilatations de E fixes sur k.
L'application Ψ de Ω dans H qui à $\alpha \in \Omega$ associe l'homothétie de centre k et de rapport α, est un morphisme surjectif d'anneaux.
A ces propriétés classiques pour les modules (Bourbaki livre II chapitre 2), s'ajoute ici la suivante qui est indépendante de k : l'image réciproque par Ψ du zéro de H est, dans Ω, l'ensemble des α tels que pour tout $x \in E$: $x * \alpha = h$ c'est-à-dire Ann(E) (III. 9). Ainsi :

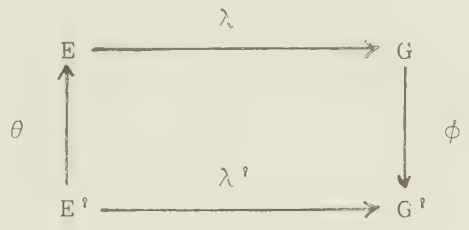
Proposition 4 : Quel que soit $k \in E$, l'anneau des homothéties de centre k est isomorphe à l'anneau quotient Ω' de Ω par l'annulateur de E.

Ce résultat illustre la conclusion de III. 9.

Dans ce chapitre l'anneau Ω est associatif.

IV. 1

Soit C la catégorie des Ω-modules à opérateur et D la catégorie des stricts Ω-espaces affines à opérateur.
Tout objet de C étant un objet de D (c'est le cas de l'exemple de III. 5), la catégorie D est représentée dans C : le foncteur $\mathcal{F}$ de $D^{o} \times C$ dans Ens associe à (E,G) (notations provisoirement simplifiées) l'ensemble des morphismes de E dans G et à (θ, ϕ) l'application de $(E,G)\mathcal{F}$ dans $(E',G')\mathcal{F}$ qui à λ fait correspondre λ' tel que : $\lambda' = \theta\ \lambda\ \phi$



Nous voulons déterminer le foncteur universel $((E)\mathcal{U}, (E)\rho)$ pour cette représentation. En particulier si $(E)\rho$ est injectif nous obtiendrons dans ce cas une solution au problème du plongement.

Soit E un strict Ω-espace affine et $k \in E$: par III. 3 Lemme 1 et III. 4 Proposition 1, on lui associe une structure de Ω-module représentée à un isomorphisme près par E_k.

Proposition : Si $(E)\rho$ est injectif alors $(E)\mathcal{U}$ est isomorphe au produit des Ω-modules E_k et Ω.

Preuve : Par hypothèse E est plongé dans $(E)\mathcal{U}$ dont les lois sont notées : $a + b$ et $a\alpha$. L'application $\lambda : a \in E \to 1 \in \Omega$ étant un morphisme de Ω-espace affine (III. 4 Définition), se prolonge en un morphisme μ de Ω-module de $(E)\mathcal{U}$ dans Ω.
Soit $k \in E$: les lois pour le Ω-module E_k s'écrivent :
$a \oplus b = a - k + b$ et $a * \alpha = a\alpha - k\alpha + k$, dans $(E)\mathcal{U}$, donc par :
$a \in E \to (a-k) \in \operatorname{Ker}\mu$, E_k et $\operatorname{Ker}\mu$ sont isomorphes.
Soit $x \in (E)\mathcal{U}$ avec $(x)\mu = \alpha$: il s'écrit de façon unique : $x = y + k\alpha$ avec $y = x - k\alpha \in \operatorname{Ker}\mu$ et $k\alpha \in \Omega' = \{k\varepsilon \mid \varepsilon \in \Omega\}$; il est immédiat que Ω' est isomorphe à Ω.

IV. 2

Soit E un strict Ω-espace affine à opérateur R, $k \in E$ et E_k le Ω-module pour les lois :

$a \oplus b = a - k + b$; $\quad a * \varepsilon = (a, k, \varepsilon, k)$.

Parce que, dans ce chapitre, Ω est associatif :

Lemme 1 : $E_k \times \Omega$ est un Ω-module pour les lois canoniques :

$(a,\alpha) + (b,\beta) = (a \oplus b \ , \ \alpha \dot{+} \beta)$

$(a,\alpha)\,\varepsilon \quad = (a * \varepsilon, \alpha\,\varepsilon)$

Lemme 2 : $(a,\alpha) = (a,1) + (k,1)\,(\alpha \dot{-} 1)$

Pour que l'ensemble R opère sur le Ω-module $E_k \times \Omega$, il est nécessaire (Lemme 2) que : $(a,\alpha)\,r = (a,1)\,r + (k,1)\,r\,(\alpha \dot{-} 1)$.

Lemme 3 : Par la loi :

$(a,\alpha)\,r = (ar,1) + (kr,1)(\alpha \dot{-} 1)$

R opère sur le Ω-module $E_k \times \Omega$.

Preuve : $[(a,\alpha)\varepsilon - (b,\beta)\varepsilon + (c,\gamma)]r = ((ar,br,\varepsilon,cr),1) + (kr,1)(\alpha\varepsilon \dot{-} \beta\varepsilon \dot{+} \gamma \dot{-} 1)$

$= (a,\alpha)r\,\varepsilon - (b,\beta)r\,\varepsilon + (c,\gamma)r$

Ainsi R opère sur le strict Ω-espace affine $E_k \times \Omega$; or il est fixe sur le zéro (k,ω).

$E_k \times \{1\}$ est un strict Ω-espace affine à opérateur R pour les opérations induites :

$(a,1)\varepsilon - (b,1)\varepsilon + (c,1) = ((a,b,\varepsilon,c),1)$

$(a,1)r = (ar,1)$

Soit $\rho : a \in E \to (a,1) \in E_k \times \{1\}$ et $\mathcal{T}_R : r \in R \to r \in R$:

Lemme 4 : $(\rho, \mathcal{T}_R)$ est un isomorphisme de Ω-espace affine à opérateur de E dans $E_k \times \{1\}$.

Si $(G, \oplus)$ est un Ω-module et ϕ un morphisme de $E_k \times \Omega$ dans G alors (Lemme 2) : $(a,\alpha)\,\phi = (a,1)\,\phi \oplus (k,1)\,\phi\,.\,(\alpha \dot{-} 1)$, ce qui montre l'unicité d'un tel morphisme pour lequel on donne l'image de $E_k \times \{1\}$.

Soit maintenant E un strict Ω-espace affine à opérateur R, $(G, \oplus)$ un Ω-module

à opérateur S et (λ, λ_R) un morphisme de Ω-espace affine à opérateur de (E,R) dans (G,S) :

Lemme 5 : Avec μ tel que : $(a, \alpha)\,\mu = (a)\,\lambda \oplus (k)\,\lambda\ (\alpha \dot{-} 1)$,
(μ, λ_R) est l'unique morphisme de Ω-module à opérateur de $(E_k \times \Omega, R)$ dans (G,S) pour lequel :

$$(\rho, \nu_R)\ (\mu, \lambda_R) = (\lambda, \lambda_R)$$

Preuve : Il reste à montrer l'existence :

$$[(a,\alpha)\varepsilon - (b,\beta)\varepsilon + (c,\gamma)]\ \mu = ((a,b,\varepsilon,c))\lambda \oplus (k)\lambda\ (\alpha\,\varepsilon \dot{-} \beta\varepsilon \dot{+} \gamma \dot{-} 1)$$
$$= (a,\alpha)\ \mu .\ \varepsilon \ominus (b,\beta)\ \mu\ .\ \varepsilon \oplus (c,\gamma).$$

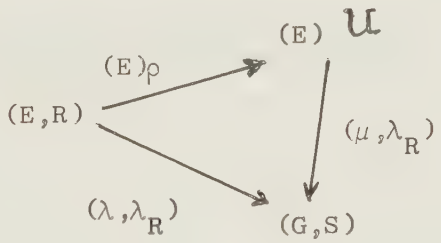
Ainsi μ est un morphisme de Ω-espace affine ; comme il respecte le zéro, c'est un morphisme de Ω-module.

D'autre part :

$$[(a,\alpha)r]\ \mu = (ar)\lambda \oplus (kr)\lambda\ (\alpha \dot{-} 1)$$
$$= (a,\alpha)\ \mu .\ (r)\ \lambda_R$$

Enfin : $\rho\ \mu = \lambda$

Par ce lemme 5, $E_k \times \Omega$ avec l'opérateur R est isomorphe au Ω-module à opérateur $(E)\,\mathcal{U}$ universel pour (E,R) :



IV. 3

Nous allons étendre les propriétés précédentes au cas d'un Ω-espace affine régulier (III. 7 Définition) à opérateur.

Nous considérons donc les objets $(E, R, \wedge)$ où l'involution $\wedge$ vérifie :

$$K_2 \ :\ \widehat{ar} = \hat{a}\ r$$

$$K_3 \ :\ \widehat{(a,b,\varepsilon,c)} = (\hat{a},\hat{b},\varepsilon,\hat{c})$$

Ceci est équivalent à $(\wedge, \mathcal{T}_R)$ est un automorphisme involutif de Ω-espace affine à opérateur.

Par K_3 : E est un strict Ω-espace affine à opérateur : $R_\wedge = R \cup \{\wedge\}$, par $\overset{\wedge}{\hat{a}} = a$: $\wedge$ est involutif et par K_2 : $\wedge$ commute avec tout élément de R.

Lemme 1 : Soit (E,S) un strict Ω-espace affine à opérateur S et s,s' des éléments de S ; si les propriétés suivantes sont vraies sur E elles sont vraies sur $E_k \times \Omega$ (IV. 2 Lemme 3) :
i) s est involutif,
ii) s et s' commutent.

Preuve : i) $(a,\alpha)\, ss = (as,1)s + (ks,1)s\,(\alpha \dot{-} 1) = (a,\alpha)$

ii) $(a,\alpha)ss' = (as,1)s' + (ks,1)s'\,(\alpha \dot{-} 1)$
$= (as's,1) + (ks's,1)\,(\alpha \dot{-} 1)$
$= (a,\alpha)s's$

Ainsi $E_k \times \Omega$ est un Ω-module à opérateur $R_\wedge$, $\wedge$ est involutif et commute avec tout élément de R ou encore :

Lemme 2 : Avec :
$\widehat{(a,\alpha)} = (\hat{a},1) + (\hat{k},1)(\alpha \dot{-} 1)$,
$(\wedge, \mathcal{T}_R)$ est un automorphisme involutif pour le Ω-module à opérateur $(E_k \times \Omega, R)$ (IV. 2 Lemme 3)

En particulier sur $E_k \times \{1\}$ l'involution vérifie : $\widehat{(a,1)} = (\hat{a},1)$ ce qui montre que : $(\hat{a})\rho = \widehat{(a)\rho}$; compte tenu de IV. 2 Lemme 4, par $(\rho, \mathcal{T}_R)$, (E,R, $\wedge$) est isomorphe à $(E_k \times \{1\}, R, \wedge)$. D'où :

Théorème 1 : Soit Ω un anneau associatif unitaire.
Tout Ω-espace affine régulier F à opérateur S peut être plongé dans un Ω-module $(G, \oplus)$ à opérateur S et à automorphisme involutif $\wedge$.

Si S opère sur G par : $(a,s) \to as$, F est isomorphe à une partie de G stable par :
$a\,\alpha \ominus \hat{b}\,\alpha \oplus c$; as .

Corollaire : Tout groupe ternaire m-commutatif à opérateur S peut être plongé dans un groupe binaire commutatif à opérateur S et à automorphisme involutif $\wedge$.

Soit maintenant (λ, λ_R) un morphisme de $(E,R,\wedge)$ dans un Ω-module G à opérateur S, et muni d'un automorphisme involutif : c'est encore le morphisme $(\lambda, \lambda_{R_\wedge})$ pour lequel $\lambda_{R\wedge}$ est λ_R sur R et respecte $\wedge$; le morphisme μ (IV. 2 Lemme 5) de $E_k \times \Omega$ dans G respecte donc $\wedge$ et la propriété d'universalité de IV. 2 s'étend ici.

Soit F un Ω-espace affine régulier à opérateur S et E le strict Ω-espace affine associé par III. 7 Théorème : E_k est aussi le Ω-module F_k pour les lois : $a \oplus b = a - \bar{k} + b$; $a * \alpha = (a,\bar{k},\varepsilon,k)$

On note encore - l'involution du lemme 2 définie sur $F_k \times \Omega$ par - sur F.

Ainsi :

Théorème 2 : Soit Ω un anneau associatif unitaire et F un Ω-espace affine régulier à opérateur S.

$(F_k \times \Omega, S, -)$ est isomorphe à l'élément universel pour (F,S) dans la catégorie Ω-module à opérateur muni d'un automorphisme involutif.

Corollaire : Soit (F,S) un groupe ternaire m-commutatif à opérateur.

$(F_k \times Z,S,-)$ est isomorphe à l'élément universel pour (F,S) dans la catégorie groupe binaire commutatif à opérateur muni d'un automorphisme involutif.

Pour ce corollaire $\Omega = Z$. Dans le chapitre suivant, nous allons maintenant considérer Z/n ...

n est un entier supérieur à 1 et Z/n l'anneau des entiers modulo n .

V. 1

On a défini (III. 7) l'expression : "le groupe ternaire m-commutatif F est un Ω-espace affine".

Si le groupe binaire commutatif $(G, \oplus)$ est un Z/n -module pour la loi : $a\,\alpha$, alors $a\,\alpha = \alpha_o\, a = \underbrace{a \oplus a \oplus \ldots \oplus a}_{\alpha \text{ fois}}$.

Si le groupe ternaire m-commutatif F est un Z/n -espace affine alors (III. 3 Proposition) F_k est un Z/n-module et l'opération affine associée est nécessairement :

$(a,b,\alpha,c) = \alpha_o\, a \ominus \alpha_o\, \bar{b} \oplus c = \alpha_o\, a \perp \alpha_o\, b + c$ (II. 11 convention) .

En particulier :

Lemme : Tout Z/n-espace affine est régulier.

Un groupe binaire commutatif est de caractéristique n au sens large si c'est un Z/n-module.

Définition : Un groupe ternaire m-commutatif est de caractéristique n si c'est un Z/n-espace affine.

Proposition : Soit F un groupe ternaire m-commutatif, E le strict groupe ternaire (F) § (I. 10) et $k \in F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) F est de caractéristique n

ii) E est de caractéristique n

iii) $F_k = E_k$ est de caractéristique n .

Preuve : III. 7 Lemme.

Si F est un groupe ternaire m-commutatif de caractéristique n, $F_k \times Z/n$ est un groupe binaire commutatif de caractéristique n ; comme Z/n est associatif et F un Z/n-espace affine régulier (V. 1 Lemme), on peut appliquer IV. 3 Théorème 1 (resp. 2) :

Proposition 1 : Tout groupe ternaire m-commutatif de caractéristique n à opérateur S, peut être plongé dans un groupe binaire commutatif de caractéristique n, à opérateur S et à automorphisme involutif.

Proposition 2 : Soit F un groupe ternaire m-commutatif, de caractéristique n et à opérateur S.
$(F_k \times Z/n, S, -)$ est isomorphe à l'élément universel pour (F,S) dans la catégorie groupe binaire commutatif de caractéristique n, à opérateur, et muni d'un automorphisme involutif.

V. 3

Soit H un ensemble : une loi (n+1)-aire sur H est une application de H^{n+1} dans H.
La définition de l'associativité pour une loi ternaire (I. 5) s'étend aisément au cas général.
Si quelle que soit la permutation σ sur $\{1,\ldots,(n+1)\}$, $(a_1,\ldots,a_{n+1})$ et $(a_{(1)\sigma}, \ldots, a_{(n+1)\sigma})$ ont même image dans H, la loi (n+1)-aire est commutative.
H est un groupe (n+1)-aire si la loi est associative et s'il existe une image réciproque de $h \in H$ lorsque n composantes sont connues (voir : 7, 9, 10 ou 11, références du chapitre I).

Soit H un groupe (n+1)-aire commutatif pour la loi :
$(a_1,\ldots,a_{n+1}) \rightarrow a_1 + \ldots + a_{n+1}$.
q étant un entier positif ou nul, l'assemblage : $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{q \text{ fois}}$ est noté $q \circ a$.

Définition : H est de caractéristique n si pour tout $a \in H$: $(n+1) \circ a = a$.

Exemple : Soit $(G, \oplus)$ un groupe binaire commutatif de caractéristique n. La loi (n+1)-aire sur G :
$(a_1,\ldots,a_{n+1}) \rightarrow a_1 \oplus \ldots \oplus a_{n+1}$,
est une loi de groupe (n+1)-aire commutatif de caractéristique n.

Lemme : Si H est un groupe (n+1)-aire commutatif de caractéristique n :
i) $n \circ a + b = b$.
ii) $a + b + (n-1) \circ c = a + b + (n-1) \circ d$ implique $c = d$.

Preuve : i) $c_1 + \ldots + c_{n-1} + a + b = c_1 + \ldots + c_{n-1} + a + n_0 a + b$

ii) $a + (n-1)_0 b + c = a + a + (n-1)_0 [a + b + (n-1)_0 d]$

$= a + (n-1)_0 b + d$

Proposition : Soit H un groupe $(n+1)$-aire commutatif de caractéristique n et $k \in H$.
H muni de : $a \oplus b = a + b + (n-1)_0 k$, est un groupe binaire commutatif de caractéristique n.

k est neutre et $\ominus b = 2_0 k + (n-1)_0 b$.

V. 4

Proposition : Soit E un strict groupe ternaire (II. 2). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E est de caractéristique n (V. 1 Définition).

ii) $n_0 a - n_0 b + c = c$

iii) $n_0 a - (n-1)_0 b = b$

iv) $(n+1)_0 a - n_0 b = a$

v) $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} - n_0 b = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} - n_0 c$.

Preuve : Passant par E_k on voit que i), ii), iii), iv), sont équivalents et impliquent v).
v) s'écrit en particulier : $(n+1)_0 a - n_0 b = (n+1)_0 a - n_0 a$ c'est-à-dire iv).

Corollaire : Soit E un strict groupe ternaire de caractéristique n pour la loi : $a - b + c$. E muni de :
$(a_1, \ldots, a_{n+1}) \to a_1 + \ldots + a_{n+1} - n_0 k$,
est un groupe $(n+1)$-aire commutatif de caractéristique n.

Preuve : C'est la construction de V. 3 Exemple, faite sur E_k .
Par v) de proposition ci-dessus cette loi $(n+1)$-aire est indépendante de k .

On note $(E)\mathfrak{H}$ ce groupe $(n+1)$-aire.

Lemme : Soit H un groupe $(n+1)$-aire commutatif de caractéristique n.
H muni de : $a - b + c = a + (n-1)_0 b + c$,
est un strict groupe ternaire de caractéristique n.

Preuve : Par V. 3 Proposition : $a \ominus b \oplus c = a + (n-1)_0 b + c + 2n_0 k$ c'est-à-dire $a + (n-1)_0 b + c$ (V. 3 Lemme i)).

On note (H) $\mathcal{E}$ ce strict groupe ternaire.

V. 5

H est groupe (n+1)-aire commutatif de caractéristique n, à opérateur S s'il existe une application de $H \times S$ dans S : $(a,s) \to as$ telle que $(a_1 + \ldots + a_{n+1})\, s = a_1\, s + \ldots + a_{n+1}\, s$.
Un morphisme pour cette structure respecte la loi (n+1)-aire et l'opération externe. Un morphisme de groupe (n+1) aire commutatif de caractéristique n, à opérateur et à automorphisme involutif, respecte aussi l'involution.

Théorème : Les catégories suivantes sont équivalentes :

i) Strict groupe ternaire de caractéristique n, à opérateur, et à involution vérifiant K_1 et K_2 .

ii) Groupte (n+1)-aire commutatif de caractéristique n, à opérateur et à automorphisme involutif.

Preuve : On définit des foncteurs réciproques en utilisant les fonctions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ (astreintes de plus à conserver les lois externes) et en transposant les morphismes.
L'action de $\mathcal{E}$ est claire ; pour celle de $\mathcal{H}$ on applique V. 4 Proposition, v).
Montrons la réciprocité :
(E)$\mathcal{H}$ $\mathcal{E}$ est muni de :
$a + (n-1)_0 b + c - n_0 k = a + (n-1)_0 b + c - n_0 b$ (V. 4 Proposition, v))
$= a - b + c$
(H) $\mathcal{E}$ $\mathcal{H}$ est muni de :
$a_1 + \ldots + a_{n+1} + n(n-1)_0 k = a_1 + \ldots + a_{n+1}$ (V. 3 Lemme, i)) .

Corollaire : La catégorie des groupes ternaires de caractéristique n à opérateur est équivalente à la catégorie des groupes (n+1)-aire commutatif de caractéristique n, à opérateur et à automorphisme involutif.

Preuve : Théorème ci-dessus et III. § Théorème.

V. 6

Pour $n = 2$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ sont fixes $(a - b + c = a + b + c)$.
Cette propriété apparaît dans [JB] : la double addition :
$(a,b,c) \to a + b + c$, introduite par P. Janin pour un pré-anneau booléen H, fait de H un groupe 3-aire commutatif de caractéristique 2. Il est identique au strict groupe ternaire (de caractéristique 2) sous-jacent au préanneau, dans le sens général [JP] . (On peut voir aussi le chapitre X pour les préanneaux et XIV. 4 pour les préanneaux booléens).

VI. 1

Dans les chapitres précédents nous avons rencontré des ensembles munis de lois n-aires, avec généralement n égal à : 0, 1, 2 ou 3.
Un ensemble L à opérateur S est muni d'une famille de lois unaires indexée par S ; un Ω-espace affine est muni d'une famille de lois ternaires indexées par Ω .
Ainsi, dans le contexte de [6], références du chapitre I, on peut parler d'une structure $\mathcal{S}$ définie par la donnée de certaines lois n-aires vérifiant certaines relations, en pensant de façon précise à l'une des structures des chapitres antérieurs.
La fait nouveau ici est que s'il s'agit d'ensembles à opérateur S, l'opérateur S est le même pour tous.

Soit L et L' des ensembles munis de la même structure $\mathcal{S}$: un morphisme de L vers L' est une application θ : L $\rightarrow$ L', qui respecte $\mathcal{S}$.
Pour des ensembles à opérateur cette notion de morphisme est plus particulière que celle de II. 1.

Une partie N de L est un sous-espace si N est stable pour les lois induites et de ce fait muni de la même structure ; on peut dire que l'injection canonique est un morphisme.

Lemme 1 : L'intersection d'une famille de sous-espaces contenant le même élément k est un sous-espace.

Preuve : Soit N l'intersection de la famille $(N_i)_{i \in I}$ de sous-espaces et $\mathcal{L}$ une loi n-aire pour la structure $\mathcal{S}$: si $a_1, \ldots, a_n$, sont dans N (qui n'est pas vide) $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$ est dans tous les N_i donc dans N.
D'autre part les relations vérifiées dans chacun des N_i sont vérifiées dans N.

Ce lemme 1 permet de définir le sous-espace engendré par une partie P non vide de L : c'est l'intersection des sous-espaces qui contiennent P.
Une famille d'éléments qui engendrent le sous-espace N est une famille de générateurs de N. N est de type fini s'il possède une famille finie de générateurs.

Lemme 2 : Soit $(P_i)_{i \in I}$ une famille de parties de L et pour chaque $i \in I$, N_i le sous-espace engendré par P_i :

.../...

Si P (resp. N) est le sous-espace engendré par l'union des P_i (resp. N_i) alors $P = N$.

Preuve : Il est immédiat que $P \subset N$.
D'autre part P est un sous-espace qui pour chaque i contient P_i donc contient N_i donc contient N .

Proposition 1 : Le sous-espace engendré par une famille finie de sous-espaces de type fini N_i est de type fini et engendré par la réunion des générateurs des N_i .

Proposition 2 : i) Si θ est un morphisme de L dans L' et N un sous-espace de L alors $(N)\,\theta$ est un sous-espace de L'.
ii) Si N est engendré par P et si θ est bijective alors $(N)\,\theta$ est engendré par $(P)\,\theta$.

Preuve : i) Soit $\mathcal{L}$ une loi n-aire pour la structure $\mathcal{S}$ et $a'_1,\ldots,a'_n$, dans $(N)\,\theta$:
$\mathcal{L}(a'_1, \ldots, a'_n) = \mathcal{L}((a_1)\,\theta, \ldots, (a_n)\,\theta) = (\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n))\,\theta$.
ii) Il suffit de montrer que $(N)\,\theta$ est le plus petit sous-espace contenant $(P)\,\theta$ ce qui est évident puisque θ est bijective.

VI. 2

Soit E un strict Ω-espace affine : on sait (III. 4 Lemme 3) que toute translation $\mathcal{C}_{xy} : a \to a - x + y$, est un automorphisme de E.
Soit N un sous-espace (affine) de E : l'image de N par une translation est un sous-espace, isomorphe à N , appelé translaté de N .

Proposition 1 : Soit M un translaté du sous-espace N :
Si $M \cap N \neq \emptyset$ alors $M = N$.

Preuve : Si $M \cap N \neq \emptyset$, il existe une translation $\mathcal{C}_{xy}$ qui applique N sur M avec x et y dans N ; il en résulte que $M = N$ car N est stable par : $a - x + y$.

Corollaire : L'ensemble des translatés du sous-espace N détermine sur E une partition $\mathcal{N}$ en sous-espaces isomorphes.

Comme l'ensemble T des translations de E est un groupe binaire, la partition $\mathcal{N}$ de ce corollaire est engendrée par l'un quelconque de ses éléments.

On voit que :

Lemme : Soit $k \in E$ et $\{a_i\}_{i \in I}$ une famille d'éléments de E :
Une partie de E est le sous-module de E_k engendré par les a_i si et seulement si c'est le sous-espace affine de E engendré par : $k \cup \{a_i\}_{i \in I}$.

En particulier à chaque sous-module de E_k correspond une partition qui est l'ensemble de ses translatés et chaque partition $\mathcal{N}$ du corollaire contient un élément associé (par ce lemme) à un sous-module de E_k.

Proposition 2 : Soit N un sous-espace de E et M un translaté de N :
quels que soient $h \in N$ et $h \in M$, M est l'image de N par $\mathcal{t}_{hk}$.

Preuve : M est l'unique élément de $\mathcal{N}$ (corollaire) qui contient k.

Corollaire : M est l'ensemble des : a - h + k , avec a parcourant N ;
M est l'ensemble des : a - b + k , avec a et b parcourant N.

VI. 3

Soit L un ensemble muni d'une structure $\mathcal{S}$ et N une partie de L : N est un noyau si c'est l'image réciproque, par un morphisme θ : L → L', pour la structure $\mathcal{S}$, d'un élément de L'.
Deux noyaux pour un même θ sont dits associés.
Soit θ un morphisme de source L : θ induit sur L une partition dont les éléments sont des noyaux associés ; réciproquement toute partition de L dont la relation d'équivalence correspondante est une congruence pour L, détermine une famille de noyaux associés.

On considère maintenant un strict Ω-espace affine E.

Lemme 1 : Pour E, tout noyau est un sous-espace affine.

Preuve : Si k' est l'image commune de a, b, c par θ, c'est aussi l'image de (a,b,α,c).

Lemme 2 : Pour E, deux noyaux associés sont translatés.

Preuve : VI. 2 Corollaire de la proposition 2.

Lemme 3 : Soit $\mathcal{N}$ une partition de E en sous-espaces translatés (VI. 2 Corollaire de la proposition 1) :
La relation d'équivalence déterminée par $\mathcal{N}$ est une congruence.

Preuve : Soit N un élément de $\mathcal{N}$ et $k \in N$; on vérifie que dans E_k :
si $a \ominus a' \in N$, $b \ominus b' \in N$ et $c \ominus c' \in N$ alors
$(a,b,\alpha,c) \ominus (a',b',\alpha',c') \in N$.

Ces lemmes 1, 2, 3 permettent d'affirmer que :

Théorème : Les noyaux d'un strict Ω-espace affine sont ses sous-espaces.

VI. 4

Soit E un strict Ω-espace affine à opérateur R.

Théorème : Les noyaux de (E,R) sont les sous-espaces affines de E stables par : $ar - br + c$.

Preuve : La condition est évidemment nécessaire .
Pour montrer qu'elle est suffisante, on complète la preuve de VI. 3 Lemme 3, en remarquant que : $ar \ominus a'r = ar - a'r + k$.

Corollaire 1 : Les noyaux d'un Ω-espace affine sont les parties stables par : $(a,\bar{b},\alpha,c)$ et $(\bar{a},b,1,c)$.

Corollaire 2 : Les noyaux d'un groupe ternaire m-commutatif sont les parties stables par : $a \perp \bar{b} + c$ et $\bar{a} \perp b + c$.

VI. 5

Soit F un Ω-espace affine à opérateur S : on appelle idéal de F un sous-espace de (F,S).
Les idéaux de F sont les parties de F stables par : (a,b,α,c) , $\bar{a}$ et as .

On voit que :

Lemme : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Pour F, toute partie à un élément est un idéal.

ii) Tout élément de F est une origine (voir II. 7).

iii) F est un strict Ω-espace affine et tout point est fixe pour S.

Comme toute partie $\{a\}$ de F est un noyau de (F,S), on peut dire qu'en dehors du cas iii) de ce lemme (étudié en VI. 3) il existe des noyaux de (F,S) qui ne sont pas des idéaux de F.
Par contre, un noyau de (F,S) étant une partie de F stable par :
$(a,\bar{b},\alpha,c)$, $(\bar{a},b,1,c)$ et $(as,\overline{bs},1,c)$:

Proposition : Tout idéal de F est un noyau de (F,S) .

Soit θ un morphisme de F vers F' (Ω-espaces affines à opérateur S) et N un noyau de F, image réciproque par θ de $a' \in F'$:
$\bar{N}$, ensemble des $\bar{a}$ pour a parcourant N, est l'image réciproque de $\overline{a'}$ donc c'est un noyau associé à N ; Ns, ensemble des as pour a parcourant N, est contenu dans l'image réciproque de a's.
Ceci étant, la propriété pour N d'être un idéal est caractérisée par $Ns \subset \bar{N} = N$ ou par $a's = \overline{a'} = a'$ que l'on peut traduire par :

Théorème : Les idéaux de la partition définie par θ sur F sont les images réciproques des origines de F' contenues dans $(F)\theta$.

VI. 6

Pour la suite de ce chapitre nous allons considérer l'ensemble $\mathrm{Hom}(F,F')$ des morphismes de Ω-espace affine de F dans F'.

Exemple : i) Si l'involution barre a un point fixe sur F alors qu'elle est sans point fixe sur F', $\mathrm{Hom}(F,F') = \emptyset$.

ii) $F = F' = \Omega$: Soit θ un morphisme avec $(\omega)\,\theta = \alpha$ et $(1)\,\theta = \beta$; pour tout $\varepsilon \in \Omega$: $(\varepsilon)\,\theta = (1\,\varepsilon \dot{-} \omega\,\varepsilon + \omega)\,\theta = \alpha\,\varepsilon - \beta\,\varepsilon + \beta$.
Un élément de $\mathrm{Hom}(\Omega, \Omega)$ est donc déterminé par les images de ω et de 1.

VI. 7

Un Ω-espace affine (vérifiant A_1, A_2 et A_3 , III. 1 Définition) est encore appelé : Ω-espace affine à droite.
Un ensemble F muni d'une application $[a,b,\varepsilon,c]$, de $F^2 \times \Omega \times F$ dans F , vérifiant A_1, A_2 et :
A_3' : $[[a,b,\alpha,c], d,\beta,e] = [a,b,\beta\alpha, [c,d,\beta,e]]$,
est un Ω-espace affine à gauche.

Si F est un Ω-espace affine à gauche, F_k muni des lois :
$a \oplus b = a \,\lrcorner\, \bar{k} + b$; $\varepsilon * a = [a,\bar{k},\varepsilon,k]$,
est un Ω-module à gauche et, dans F_k :
$[a,b,\varepsilon,c] = \varepsilon * a \ominus \varepsilon * b \oplus c$.

Le groupe ternaire m-commutatif F est un Ω-biespace affine si c'est un Ω-espace affine à gauche et à droite vérifiant la propriété de permutabilité suivante :
$[(a,b,\alpha,c), (a',b',\alpha,c'),\varepsilon,(a'',b'',\alpha,c'')] =$
$= ([a,a',\varepsilon,a''],[b,b',\varepsilon,b''],\alpha,[c,c',\varepsilon,c''])$

Proposition : Soit F un Ω-espace affine régulier à gauche et à droite :
F est un Ω-biespace affine si et seulement si F_k est un Ω-bimodule.

Preuve : Si F est un Ω-biespace affine : alors dans F_k :

$$\begin{aligned}
\varepsilon * (a * \alpha) &= [(a,\bar{k},\alpha,k),\bar{k},\varepsilon,k] \\
&= [(a,\bar{k},\alpha,k),(\bar{k},k,\alpha,\bar{k}),\varepsilon,(k,\bar{k},\alpha,k)] \\
&= ([a,\bar{k},\varepsilon,k],[\bar{k},k,\varepsilon,\bar{k}],\alpha,[k,\bar{k},\varepsilon,k]) \\
&= ([a,\bar{k},\varepsilon,k],k,\alpha,k) \\
&= (\varepsilon * a) * \alpha \quad .
\end{aligned}$$

Si F_k est un Ω-bimodule :

$$[(a,b,\alpha,c),(a',b',\alpha,c'),\varepsilon,(a'',b'',\alpha,c'')] =$$

$$= \varepsilon * (a * \alpha \ominus \bar{b} * \alpha \oplus c) \ominus \varepsilon * (a'*\alpha \ominus \bar{b}'*\alpha \oplus c') \oplus a''*\alpha \ominus \bar{b}'' * \alpha \oplus c'' =$$

$$= (\varepsilon*a \ominus \varepsilon* \bar{a}' \oplus a'')* \alpha \ominus (\varepsilon * b \ominus \varepsilon * \bar{b}' \oplus b'')*\alpha \oplus \varepsilon * c \ominus \varepsilon * \bar{c}' \oplus c'' =$$

$$= ([a,a',\varepsilon,a''],[b,b',\varepsilon,b''],\alpha,[c,c',\varepsilon,c''])$$

Si Ω est commutatif, tout Ω-espace affine régulier est un Ω-biespace affine. En particulier tout groupe ternaire m-commutatif est un Z-biespace affine.

VI. 8

Soit F un Ω-espace affine (à droite), F' un Ω-biespace affine et Hom(F,F') l'ensemble des morphismes de F dans F' (F' muni de sa structure de Ω-espace affine à droite).
Soit θ_1, θ_2, θ_3 des morphismes de F dans F' et $\varepsilon \in \Omega$: on considère l'application notée $[\theta_1, \theta_2, \varepsilon, \theta_3]$, de F dans F' :
$a \to [(a)\theta_1, (a)\theta_2, \varepsilon, (a)\theta_3]$ (opération affine à gauche dans F').

Lemme : $[\theta_1, \theta_2, \varepsilon, \theta_3] \in \mathrm{Hom}(F,F')$.

Preuve : $(a,b,\alpha,c)[\theta_1, \theta_2, \varepsilon, \theta_3] =$

$$= [(a,b,\alpha,c)\theta_1,(a,b,\alpha,c)\theta_2,\varepsilon,(a,b,\alpha,c)\theta_3] =$$

$$= [((a)\theta_1,(b)\theta_1,\alpha,(c)\theta_1),((a)\theta_2,(b)\theta_2,\alpha,(c)\theta_2),\varepsilon,((a)\theta_3,(b)\theta_3,\varepsilon,(c)\theta_3)]$$
$$([(a)\theta_1,(a)\theta_2,\varepsilon,(a)\theta_3],[(b)\theta_1,(b)\theta_2,\varepsilon,(b)\theta_3],\alpha,[(c)\theta_1(c)\theta_2,\varepsilon,(c)\theta_3])$$
$$((a)[\theta_1,\theta_2,\varepsilon,\theta_3],(b)[\theta_1,\theta_2,\varepsilon,\theta_3],\alpha,(c)[\theta_1,\theta_2,\varepsilon,\theta_3])$$

On vérifie :

Proposition : Si F est un Ω-espace affine (à droite) et F' un Ω-biespace affine, Hom (F,F'), lorsqu'il n'est pas vide, est un Ω-espace affine à gauche pourvu que F' soit régulier à droite.

En particulier : $(a)\ \bar{\theta} = \overline{(a)\ \theta} = (\bar{a})\ \theta$ pour tout $a \in F$.

Corollaire 1 : Soit F et F' des groupes ternaires m-commutatifs.
Hom (F,F'), lorsqu'il n'est pas vide, est un groupe ternaire m-commutatif

Il existe des Ω-biespaces affines qui ne sont pas réguliers à droite (III. 4, Exemple). Si F' n'est pas régulier à droite, l'opération du lemme sur $\mathrm{Hom}(F,F')$ vérifie toujours les axiomes A_2, A_3 et la loi ternaire associée (pour $\varepsilon = 1$) est associative, m-commutative et simplifiable mais on ne peut plus affirmer l'existence de l'inverse d'un élément ; ce cas intéressant se situe dans le contexte des préespaces affines de la conclusion.

VI. 9

Soit F un Ω-espace affine, E un strict Ω-biespace affine, $k \in F$ et $k' \in E$. Dans le Ω-module à gauche des applications linéaires de F_k dans $E_{k'}$, (morphismes de Ω-modules à droite), on considère la partie L des éléments qui respectent l'involution barre sur F : $\lambda \in L$ impose $(\bar{a})\,\lambda = (a)\,\lambda$ pour tout $a \in F$; d'autre part $\lambda \in \mathrm{Hom}(F,E)$ et λ envoie k sur k'.
On voit que L est un Ω-module à gauche.
Le Ω-module à gauche $L \times E_{k'}$ est canoniquement un Ω-espace affine à gauche.

Proposition : Avec les notations précédentes :
$\mathrm{Hom}(F,E)$ est isomorphe à $L \times E_{k'}$.

Preuve : Soit ϕ l'application de $L \times E_{k'}$ dans $\mathrm{Hom}(F,E)$ qui à (λ, h') associe : $\lambda \,.\, \mathscr{L}_{k'h'}$.

ϕ est injective : h' est l'image de k par $\lambda \,.\, \mathscr{L}_{k'h'}$ et $\lambda \,.\, \mathscr{L} = \lambda' \,.\, \mathscr{L}$ implique $\lambda = \lambda'$.

ϕ est surjective : si $\theta \in \mathrm{Hom}(F,E)$, envoie k sur h' alors $\lambda = \theta \,.\, \mathscr{L}_{h'k'}$.

ϕ est un morphisme : l'image par ϕ de :
$(\varepsilon\,\lambda_1 - \varepsilon\,\lambda_2 + \lambda_3 \,,\ \varepsilon * h_1' \ominus \varepsilon * h_2' \oplus h_3')$ est le morphisme :
$a \to \varepsilon * (a)\,\lambda_1 \ominus \varepsilon * (a)\,\lambda_2 \oplus (a)\,\lambda_3 \oplus \varepsilon * h_1' \ominus \varepsilon * h_2' \oplus h_3'$, soit :
$a \to \varepsilon * ((a)\,\lambda_1 \oplus h_1') \ominus \varepsilon * ((a)\,\lambda_2 \oplus h_2') \oplus ((a)\,\lambda_3 \oplus h_3')$, c'est-à-dire :
$[(\lambda_1, h_1')\,\phi,\ (\lambda_2, h_2')\,\phi,\ \varepsilon,\ (\lambda_3, h_3')\,\phi]$.

Corollaire : Ω étant associatif, soit E un strict Ω-espace affine et E_k^* le dual (au sens habituel) du Ω-module E_k :
$\mathrm{Hom}(E, \Omega)$ est isomorphe à $E_k^* \times \Omega$.

VI. 10

Soit F un Ω-biespace affine et $E = (F)\mathfrak{S}$: on note ici M (resp. N) l'ensemble des morphismes de groupe ternaire de E dans E (resp. F dans F) et P (resp. Q) l'ensemble des morphismes de Ω-espace affine de E dans E (resp. F dans F).

Appliquons les résultats de VI. 8 :
M est un strict groupe ternaire pour la loi :
$\theta_1 - \theta_2 + \theta_3$: $x \to (x)\theta_1 - (x)\theta_2 + (x)\theta_3$, dans E.
Soit $\mathcal{J}$ l'application identique sur F ou E : l'involution barre sur F est un élément involutif de M (pour la composition) qui s'écrit $\bar{\mathcal{J}}$.
N est un groupe ternaire m-commutatif pour la loi :
$\theta_1 \perp\!\!\!\perp \theta_2 + \theta_3$: $x \to (x)\theta_1 \perp\!\!\!\perp (x)\theta_2 + (x)\theta_3$, dans F,
qui s'écrit encore dans M : $\theta_1 - \theta_2 \bar{\mathcal{J}} + \theta_3$. On voit que :

Lemme : Dans M muni de la composition des applications, N est le centraliseur de $\bar{\mathcal{J}}$.

On suppose F régulier à droite : P est un strict Ω-espace affine pour la loi de VI. 8 et c'est un sous-groupe ternaire de M.

Proposition 1 : i) $Q = N \cap P$.
ii) $\bar{\mathcal{J}}$ est dans P et Q est le centraliseur de $\bar{\mathcal{J}}$ dans P.

Preuve : i) θ est un morphisme du Ω-espace affine F si et seulement si c'est un morphisme du Ω-espace affine E qui respecte l'involution barre.
ii) Par hypothèse , F est régulier donc l'involution barre est un morphisme du Ω-espace affine E.

En III. 4, Proposition 2, nous avons muni l'ensemble T des translations de E d'une structure canonique de Ω-module isomorphe à E_k. Nous continuons avec Ω commutatif.

Proposition 2 : Le Ω-module T de III. 4, Proposition 2, est le sous-module T de $P_{\mathcal{J}}$.

Preuve : On vérifie que : $\mathscr{C}_{ab}\,\mathscr{C}_{bc} = \mathscr{C}_{ab} - \mathcal{J} + \mathscr{C}_{bc}$ et que la translation : $x \to (a,b,\alpha,x)$ est $(\mathscr{C}_{ab}, \mathcal{J}, \alpha, \mathcal{J})$.

Proposition 3 : L'ensemble des symétries de E est un sous-espace affine de P isomorphe à E.

Preuve : On étend l'isomorphisme de I. 11, Théorème 2, en remarquant que : $((e-x+a), (e-x+b), \varepsilon, (e-x+c)) = e-x+(a,b,\varepsilon,c)$.

Dans ce paragraphe nous avons mis l'accent, pour M, N, P, Q, sur les opérations affines ; en fait ils sont aussi munis de la loi binaire de composition et ces deux opérations sont reliées par une propriété de distributivité ce qui montre la nécessité d'une étude plus poussée faite en XI. 2.
Remarquons cependant, pour illustrer la notion de Ω-préalgèbre ternaire introduite en conclusion (définition 3), que l'ensemble des symétries du strict Ω-espace affine E muni de l'opération affine de la proposition 3 et de la loi ternaire de composition est une Ω-préalgèbre ternaire et un précorps ternaire associatif m-commutatif et tripotent (voir les commentaires après la défintion 3 de conclusion).

VII. 1

Soit Ω un anneau de zéro ω, d'unité 1 et H un ensemble. H est muni d'une loi pondérée par Ω si, pour tout entier positif n, il existe une fonction $\sum_n$ de $(H \times \Omega)^n$ dans H notée :

$((a_1, \alpha_1), \ldots, (a_n, \alpha_n)) \to \sum_n a_i \alpha_i = a_1 \alpha_1 + \ldots + a_n \alpha_n$,

telle que :

B_1 : $\sum_n a_i \alpha_i$ est défini si et seulement si : $\alpha_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_n = 1$

B_2 : $\sum_n$ est indépendante de l'ordre des composants (a_i, α_i) .

B_3 : $a\,1 + b\,\omega = a$ pour tous $a,b,$ de H .

B_4 : $\sum_n$ et $\sum_{n+1}$ sont liés par :

$$a(\alpha \dot{+} \varepsilon) + b\,\beta + \ldots + c\,\gamma = a\,\alpha + a\,\varepsilon + b\,\beta + \ldots + c\,\gamma$$

B_5 : Pour n impair $\sum_n$ et $\sum_{n+2}$ sont liés par :

$$(\sum_3 a_i \alpha_i)\,\varepsilon + b\,\beta + \ldots + c\,\gamma = a_1(\alpha_1\varepsilon) + a_2(\alpha_2\varepsilon) + a_3(\alpha_3\varepsilon) + b\,\beta + \ldots + c\,\gamma$$

avec $\varepsilon = 1$ pour $n > 3$.

H muni d'une loi pondérée par Ω est un Ω-espace pondéré.

Un morphisme de Ω-espaces pondérés est une application qui respecte la loi pondérée. Si θ est un morphisme de H dans H' on a donc pour tout n positif :

$$(\sum_n a_i \alpha_i)\,\theta = \sum_n (a_i)\,\theta\,\alpha_i$$

Lemme : Soit H un Ω-espace pondéré. Pour tout $a \in H$: $a\,1 = a$.

Preuve : $a\,1 = a(1 \dot{+} \omega) = a\,1 + a\,\omega = a$.

Notant B_3' la propriété de ce lemme, on voit que sous B_3' et B_4 : $a\,1 + a\,\omega = a$ pour tout $a \in H$. Cependant B_3' ne peut pas remplacer B_3 dans le système d'axiomes précédent. Voici un contre exemple :
Soit $\Omega = Z/2$ et $H = \{a,b\}$. On pose : $a\,1 = a$ et $b\,1 = b\,1 + a\,\omega = b\,\omega + a\,1 = b$. Sous B_1, B_2 et B_4 la fonction $\sum_n$ est déterminée pour tout n positif : $\sum_n x_i \alpha_i$ est a si et seulement si : $x_i = a$ pour tout i de 1 à n . Il en résulte que B_5 est vérifié.

Soit $H = \Omega$ un anneau intègre ; on définit $\sum_n a_i \alpha_i$ par la somme des a_i dont le coefficient α_i n'est pas nul : B_2, B_3, B_5 (et B_1 si l'on veut) sont vérifiés mais pas nécessairement B_4.

Soit $H = \Omega$ un anneau non associatif ; on définit $\sum_n a_i \alpha_i$ par $a_1 \alpha_1 + \ldots + a_n \alpha_n$ dans H : B_2, B_3, B_4 (et si l'on veut B_1) sont vérifiés mais pas B_5.

VII. 2

Proposition 1 : Tout Ω-espace pondéré est un strict Ω-espace affine.

Preuve : Posons : $(a,b,\alpha,c) = a\alpha + b(\dot{-}\alpha) + c\,1$ et vérifions : A_1', A_2, A_3 (III. 1) :

A_1' : $(a,b,1,c) = (c,b,1,a)$ par B_2

$(a,a,1,b) = a\omega + b\,1 = b$ par B_4 et B_3

A_2 : $(a,b,\alpha \dot{+} \beta,c) = a(\alpha \dot{+} \beta) + b(\dot{-}\alpha \dot{-}\beta) + c\,1$

$= a\alpha + b(\dot{-}\alpha) + a\beta + b(\dot{-}\beta) + c\,1$ B_4 et B_2

$= a\alpha + b(\dot{-}\alpha) + (a\beta + b(\dot{-}\beta) + c\,1)\,1$ B_5

$= (a,b,\alpha,(a,b,\beta,c))$

A_3 : $((a,b,\alpha,c),d,\beta,e) = (a\alpha + b(\dot{-}\alpha) + c\,1)\beta + d(\dot{-}\beta) + e\,1$

$= a(\alpha\beta) + b(\dot{-}\alpha\beta) + c\beta + d(\dot{-}\beta) + e\,1$ B_5 .

$= a(\alpha\beta) + b(\dot{-}\alpha\beta) + (c\beta + d(\dot{-}\beta) + e\,1)\,1$ B_5

$= (a,b,\alpha\beta,(c,d,\beta,e))$

Proposition 2 : Si H est un Ω-espace pondéré muni de l'opération affine $(a,b,\varepsilon,c) = a\varepsilon + b(\dot{-}\varepsilon) + c\,1$ (proposition 1) alors pour $n > 1$:

$\sum_n a_i \alpha_i = (a_1, a_n, \alpha_1, (a_2, a_n, \alpha_2, (\ldots, (a_{n-1}, a_n, \alpha_{n-1}, a_n))\ldots)$

Preuve : $\sum_n a_i \alpha_i = a_1 \alpha_1 + \ldots + a_{n-1} \alpha_{n-1} + a_n (1 \dot{-} \alpha_1 \dot{-} \ldots \dot{-} \alpha_{n-1})$ B_1

Par B_4 itéré et B_2 on écrit :

$a_1 \alpha_1 + a_n(\dot{-}\alpha_1) + \ldots + a_{n-1} \alpha_{n-1} + a_n(\dot{-}\alpha_{n-1}) + a_n$; on conclut par B_5 itéré.

VII. 3

Lemme : Soit E un strict Ω-espace affine.

$(a_1,a_n,\alpha_1,(a_2,a_n,\alpha_2,(\ldots,(a_{n-1},a_n,\alpha_{n-1},a_n))\ldots) = a_1 * \alpha_1 \oplus \ldots \oplus a_n * \alpha_n$ dans E_k, avec $\alpha_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_n = 1$.

Preuve : L'expression de gauche s'écrit dans E_k :
$a_1^* \alpha_1 \ominus a_n^* \alpha_1 \oplus a_2^* \alpha_2 \ominus a_n^* \alpha_2 \oplus \ldots \oplus a_{n-1}^* \alpha_{n-1} \ominus a_n^* \alpha_{n-1} \oplus a_n$

Proposition : Tout strict Ω-espace affine E est un Ω-espace pondéré.

Preuve : On pose : $a\ 1 = a$ pour tout $a \in E$ et $\sum_n a_i \alpha_i$, pour $n > 1$, égal aux expressions du lemme.

On note Staff_Ω la catégorie des stricts Ω-espaces affines et Pond_Ω la catégorie des Ω-espaces pondérés.
On définit un foncteur de Staff_Ω dans Pond_Ω (resp. Pond_Ω dans Staff_Ω) en appliquant pour chaque objet la construction de proposition (resp. VII. 2 Proposition 1) et en conservant l'application sous-jacente à chaque morphisme.
Ces foncteurs étant réciproques :

Théorème : Les catégories Staff_Ω et Pond_Ω sont équivalentes.

Dans la suite, étant donné un strict Ω-espace affine (resp. Ω-espace pondéré) nous le considérerons aussi bien comme un Ω-espace pondéré (resp. strict Ω-espace affine).
Selon les circonstances c'est la loi pondérée ou l'opération affine qui s'avèrera la plus maniable.

Soit H un Ω-espace pondéré et $k \in H$: par VII. 3 Lemme : $\sum_n a_i \alpha_i$ s'écrit : $a_1^* \alpha_1 \oplus \ldots \oplus a_n^* \alpha_n$ dans le Ω-module H_k ; il en résulte que la loi pondérée possède les propriétés formelles d'une combinaison linéaire dans un module (la seule différence étant le respect de l'axiome B_1 par $\sum_n$) : nous dirons que $\sum_n a_i \alpha_i$ est une combinaison linéaire pondérée.

Pour terminer ce paragraphe nous mentionnons le lemme suivant qui éclaire sous un autre angle le chapitre V :

Lemme : i) Un groupe $(n+1)$-aire commutatif de caractéristique n est un Z/n-espace pondéré pour :

$$\sum_m a_i \alpha_i = \alpha_1 \circ a_1 + \ldots + \alpha_m \circ a_m \qquad \text{(voir V. 3)}$$

ii) Un Z/n-espace pondéré est un groupe $(n+1)$-aire commutatif de caractéristique n pour la loi $(n+1)$-aire :

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) \to \sum_{n+1} a_i\ 1$$

VII. 4

Proposition 1 : Soit E un strict Ω-espace affine et P une partie non vide de E :
Le sous-espace affine engendré par P est (déterminé par) l'ensemble N des combinaisons linéaires pondérées d'éléments de P.

Preuve : Tout sous-espace contenant P contient N. D'autre part, en pointant sur $k \in P$, on voit que N est un sous-espace.

Corollaire 1 : Le sous-espace affine engendré par : $\{a_1, \ldots, a_m\}$ est l'ensemble des $\sum_r a_i \alpha_i$.

Corollaire 2 : Soit F un Ω-espace affine régulier, P une partie de F , $\bar{P}$ l'ensemble des $\bar{a}$ pour a parcourant P et N le strict sous-espace affine de F engendré par $P \cup \bar{P}$:
N est le sous-espace du Ω-espace affine F engendré par P (VI. 2).

Preuve : N , ensemble des $\Sigma a_i \alpha_i + \Sigma \bar{a}_i \beta_i$, est contenu dans tout sous-espace contenant P ; d'autre part N est stable par l'involution barre.

Soit E un Ω-espace pondéré ; un ensemble de n couples $(a_i, \alpha_i) \in E \times \Omega$ pour lequel la somme des α_i est 1 dans Ω, est appelé : système des points a_i pondérés par les coefficients α_i. L'image $\sum_n a_i \alpha_i$ par la loi pondérée est le barycentre des points a_i pondérés par les α_i.
La proposition précédente s'interprète alors de la façon suivante : le sous-espace engendré par la partie P de E est l'ensemble des barycentres pour tous les systèmes (a_i, α_i) possibles avec $a_i \in P$.

La barycentre du système de n points $a_1, \ldots, a_n$, pondéré par des α_i tous égaux est l'équibarycentre des points a_i .

Lemme 1 : L'équibarycentre des points a_i existe si et seulement si $n = 1 \dot{+} \ldots \dot{+} 1$, n fois dans Ω , est inversible.

Preuve : $1 = \alpha_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_n = n \alpha_1$.

Si pour $n > 2$, $n = 1$ dans Ω , alors l'équibarycentre des points $a_1, \ldots, a_n$

est : $a_1 + \ldots + a_n$. En particulier lorsque Ω est de caractéristique 2, $a + b + c = a - b + c$ donc d est l'équibarycentre de (a,b,c) si et seulement si (a,b,c,d) est un parallélogramme (I. 9).

Un ensemble de n couples $(a_i, \mu_i) \in E \times \Omega$, les μ_i étant quelconques, est appelé : système de points pesants ; $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_n$ est le poids du système. Ce système est dit géométrique lorsque $\mu_1 = \ldots = \mu_n = 1$.

Lemme 2 : L'application :

$x \to x' = x(1 \dot{-} \mu) + a_1 \mu_1 + \ldots + a_n \mu_n$,

est une dilatation de E (III. 10).

Preuve : $x' = x(1 \dot{-} \mu) - a_1(1 \dot{-} \mu) + (a_1 \mu_1 + \ldots + a_n \mu_n + a_1(1 \dot{-} \mu))$.

La dilatation de ce lemme 2 est la dilatation gravifique du système des n points pesants (a_i, μ_i).
Tout point fixe pour cette dilatation est un centre de gravité de ce système ; un centre de gravité d'un système géométrique est appelé un centre géométrique.
Deux systèmes sont équivalents s'ils ont la même dilatation gravifique. On voit que :

Proposition 2 : Soit S un système de n points pesants (a_i, μ_i), de masse μ.

Si g est un centre de gravité de S, S est équivalent au système constitué par l'unique point pesant (g, μ).

Un système de points pondérés est un système de points pesants de masse 1. La dilatation gravifique associée applique tout point x de E sur le barycentre du système ; ce barycentre est donc l'unique centre de gravité.

Proposition 3 : Si les n points $a_1, \ldots, a_n$, possèdent un équibarycentre, c'est aussi leur unique centre géométrique.

Preuve : Par le lemme 1, n est inversible dans Ω donc, par III. 10 proposition 3, toute dilatation de rapport $(1 \dot{-} n)$ possède un unique centre c qui, dans E_k vérifie :
$c * n = a_1 \oplus \ldots \oplus a_n$.

Un milieu de deux points a,b, est un centre géométrique du système $(a,1), (b,1)$;

la dilatation gravifique associée est la symétrie qui applique a sur b.

Corollaire : Lorsque 2 est inversible dans Ω, tout couple de points possède un unique milieu.

VII. 5

L'anneau Ω est associatif.

Soit X un ensemble : le $\mathfrak{N}$-module M libre pour X est (construit sur) l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de X. On peut considérer X comme une partie de M en identifiant $x \in X$ et $x\,1 \in M$; alors toute application de X dans un Ω-module M' se prolonge uniquement en une application linéaire de M dans M'.
Soit L l'ensemble des combinaisons linéaires pondérées formelles d'éléments de X : L est, dans M, le sous-espace affine engendré par X (VII. 4 Proposition 1) ainsi L est muni d'une structure canonique de strict Ω-espace affine.
Soit E un strict Ω-espace affine et θ une application de X dans E : on voit qu'il existe une unique application affine μ de L dans E, prolongeant θ ; elle est définie par $(\sum_n x_i\,\alpha_i)\,\mu = \sum_n (x_i)\,\theta\,\alpha_i$.
Soit k le zéro de M, $y \in X$ et N l'image de L par la translation $\mathcal{C}_{yk}$: N est un sous-module de M isomorphe au Ω-module libre pour $X - \{y\}$ et les sous-espaces affines L et N sont isomorphes (VI. 2).
Ainsi :

Proposition 1 : Le strict Ω-espace affine libre pour l'ensemble X est isomorphe au strict Ω-espace affine :
i) des combinaisons linéaires pondérées formelles d'éléments de X
ii) associé au Ω-module libre pour $X - \{y\}$.

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de stricts $\mathfrak{N}$-espaces affines : l'ensemble $\prod_I E_i$ muni de la structure produit est un strict Ω-espace affine (le produit des E_i).

Corollaire : Le strict $\mathfrak{N}$-espace affine libre pour l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_m\}$ est le strict Ω-espace affine produit Ω^{m-1}.

Soit E un strict Ω-espace affine, $(x_i)_{i \in I}$ une partie de E, θ son injec-

tion dans E, $\mathcal{U}$ le strict Ω-espace affine libre pour $(x_i)_{i \in I}$ et λ le morphisme : $\mathcal{U} \to E$ déterminé par θ :

$(x_i)_{i \in I}$ est une base (affine) si λ est bijectif.

$(x_i)_{i \in I}$ est une famille (affinement) libre si λ est injectif.

($\mathcal{U}$) λ étant le sous-espace affine engendré par $(x_i)_{i \in I}$ dans E (VI. 2), il en résulte que $(x_i)_{i \in I}$ engendre E si et seulement si λ est surjectif.

X est un ensemble à involution $\wedge$ si X est muni de l'involution $\wedge$.
Soit X un ensemble à involution $\wedge$ et L le strict Ω-espace affine libre pour X ; posant :

$$\overbrace{\Sigma\, x_i\, \alpha_i} = \Sigma\, \hat{x}_i\, \alpha_i \quad ,$$

on définit sur L une involution qui vérifie K_3 (IV. 3) : soit $\hat{L}$ le Ω-espace affine régulier ainsi obtenu.

Proposition 2 : Avec les notations précédentes $\hat{L}$ est le Ω-espace affine régulier libre pour l'ensemble à involution X.

Preuve : Soit θ un morphisme de $(X, \wedge)$ dans le Ω-espace affine F : il existe un morphisme ψ de strict Ω-espace affine de $\hat{L}$ dans F qui étend θ et ψ respecte $\wedge$ sur $\hat{L}$.

Soit X un ensemble, X' une copie (disjointe) de X et $Y = X \cup X'$: Y est un ensemble à involution pour : $x \longleftrightarrow x'$.

Proposition 3 : Le Ω-espace affine régulier libre pour l'ensemble X est le Ω-espace affine régulier libre pour l'ensemble à involution Y.

Preuve : Une application θ de X dans le Ω-espace affine F se prolonge à Y par $(x')\theta = \overline{(x)\theta}$, et respecte l'involution sur Y. On applique ensuite la proposition 2.

Soit $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$: le Ω-espace affine régulier libre pour X est dans Ω^{2m} l'ensemble des $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m)$ avec $\alpha_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_m \dot{+} \alpha'_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha'_m = 1$, muni de l'opération affine : $a\,\varepsilon - b\,\varepsilon + c$, où $\hat{a} = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

VII. 6

Soit E un strict Ω-espace affine et P un sous-espace affine de E : une partie $(p_i)_{i \in I}$ qui engendre P (VI. 2) est encore appelée un système générateur de P.

A chaque système générateur de P associons son cardinal : la classe des cardinaux étant bien ordonnée il existe un système générateur minimal, en ce sens que son cardinal est le plus petit.

Définition 1 : Soit E un strict Ω-espace affine et P un sous-espace affine de E :

Le rang de P est le cardinal d'un système générateur minimal amputé d'un élément.

Un sous-espace affine de rang n (fini ou non) est un n-sous-espace.

Ainsi le rang du sous-espace $\{a\}$ est 0, celui du sous-espace engendré par a et b distincts est 1, etc.

Afin d'obtenir plus de généralité dans certains raisonnements on pourra considérer l'ensemble vide comme un sous-espace de rang (-1).

Lemme 1 : Un morphisme θ de stricts Ω-espaces affines conserve le rang des sous-espaces si et seulement si θ est injectif.

Alors θ conserve la propriété : "système générateur minimal".

Preuve : Si θ n'est pas injectif, il existe un sous-espace de rang 1 dont l'image est de rang 0. Si θ est injectif c'est un isomorphisme entre un sous-espace quelconque et son image.

Soit P un sous-espace de E et $\{p_i\}$ un système générateur minimal de P : une partie de $\{p_i\}$ de cardinal m est un m-uplet générique de P ; pour m = 1, on dit encore : élément générique de P.

Proposition 1 : Soit E un strict $\mathfrak{R}$-espace affine et P un n-sous-espace de E : tout élément de P est générique pour P.

Preuve : Soit $a \in P$: si $\{p_i\}$ est un système générateur minimal de P, la translation $\mathscr{t}_{p_1 a}$ transforme P en P (VI. 2 Proposition 2) et $\{p_i\}$ en un

système générateur minimal de P (lemme 1), système qui contient a.

Soit maintenant G un Ω-module et P un sous-module de G. Comme pour un sous-espace affine on définit la notion de système générateur minimal pour le sous-module P. Par VI. 2, $\{p_i\}_{i \in I}$ est un système générateur minimal pour le sous-module P si et seulement si $k \cup \{p_i\}_{i \in I}$ est un système générateur minimal pour le sous-espace affine P.
Comme k est générique pour le sous-espace affine P (proposition 1) il peut toujours figurer dans un système générateur minimal pour le sous-espace affine P ; par conséquent :

Lemme 2 : Soit G un Ω-module et P un sous-module de G : le cardinal d'un système générateur minimal pour le sous-module P est égal au rang du sous-espace affine P.

Définition 2 : Le rang d'un sous-module de G est le cardinal d'un système générateur minimal pour ce sous-module.

Par le Lemme 2 :

Proposition 2 : Soit E un strict Ω-espace affine :
Pour tout $k \in E$ et tout sous-espace affine P contenant k, le rang du sous-espace affine P est égal au rang du sous-module P de E_k.

Le rang du sous-espace P sera noté rg(P).

VII. 7

Définition 1 : Soit E un strict Ω-espace affine et n un cardinal avec $n \leqslant rg(E)$:
Un n-hyperplan est un n-sous-espace maximal.

Les 0-hyperplans sont les points de E.
Un 1-hyperplan est une droite de E.
L'ensemble vide est parfois appelé (-1)-hyperplan.

Proposition 1 : Si θ est un isomorphisme de stricts Ω-espaces affines l'image d'un n-hyperplan est un n-hyperplan.

Preuve : VII. 6 Lemme 1.

Lemme 1 : Soit X un ensemble ordonné. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Toute partie non vide de X a un élément maximal.

ii) Toute suite croissante d'éléments de X est stationnaire.

Preuve : Bourbaki, Ensembles, chapitre III, § 6, n° 5, Proposition 6.

Proposition 2 : Pour un strict Ω-espace affine E les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Tout sous-espace affine est de rang fini.

ii) Toute chaîne de sous-espaces affines distincts est finie.

iii) Tout ensemble non vide de sous-espaces affines possède un élément maximal.

Preuve : Le Lemme 1 montre l'équivalence de ii) et iii).
Compte tenu des propriétés des Ω-modules noethériens, i) et ii) sont équivalentes pour les sous-espaces contenant $k \in E$ et ceci est vrai quel que soit $k \in E$.

Définition 2 : Un strict Ω-espace affine est noethérien lorsqu'il possède les propriétés équivalentes de cette proposition.

Tout strict Ω-espace affine noethérien est de rang fini.
Le strict Ω-espace affine E est noethérien si et seulement si le Ω-module E_k est noethérien.

Définition 3 : Soit E un strict Ω-espace affine et n un cardinal avec $n < rg(E)$:
E est plein d'hyperplans jusqu'au rang n si pour tout m-sous-espace, quel que soit $m \leqslant n$, il existe un m-hyperplan qui le contient.

Tout strict Ω-espace affine est plein d'hyperplans jusqu'à zéro (plein de points)

Au chapitre suivant nous définirons une "géométrie affine" et nous montrerons que c'est un strict Ω-espace affine plein d'hyperplans jusqu'au rang 1 (plein de points et de droites).

E est plein d'hyperplans lorsqu'il est plein d'hyperplans jusqu'au rang : (rg(E)-1). Tout strict espace affine sur un corps est plein d'hyperplans ; tout strict espace affine noethérien est plein d'hyperplans qui sont tous de rang fini.

Théorème : Soit E un strict Ω-espace affine qui est plein d'hyperplans jusqu'à n fini (avec $n < rg(E)$) :
Pour tous hyperplans distincts P et Q de rang inférieur ou égal à n : $P \subset Q$ implique $rg(P) < rg(Q)$.

Preuve : On suppose $rg(P) > rg(Q)$; il en résulte que P ne peut pas être vide. Soit $x_1 \notin Q$ (Q est distinct de E), N le sous-espace engendré par $Q \cup x_1$ et $m_1 = rg(N)$; on a : $m_1 \leqslant rg(Q) + 1$ et $m_1 \neq rg(P)$ donc $m_1 < rg(P) \leqslant n$. Ainsi il existe un m_1-hyperplan Q_1 qui contient N donc aussi P et Q ; comme m_1 est nécessairement distinct des rangs des hyperplans strictement contenus dans Q_1, et parce que n est fini, on voit qu'en itérant cette construction on trouve un indice i pour lequel $rg(Q_i) = 0$, ce qui est absurde.

Définition 4 : Soit E un strict Ω-espace affine et n un cardinal avec $n \leqslant rg(E)$:
E est croissant jusqu'à n si pour tous sous-espaces N et P avec $rg(P) \leqslant n$:
$N \subset P$ implique $rg(N) \leqslant rg(P)$.

E est croissant lorsqu'il est croissant jusqu'à rg(E).

La définition 4 s'applique aussi à un module en considérant des sous-modules. On voit que le strict Ω-espace affine E est croissant jusqu'à n si et seulement si le Ω-module E_k est croissant jusqu'à n.

Tout module est croissant jusqu'à zéro.

Tout module simple est croissant.

Soit Ω un anneau associatif unitaire : tout Ω-module est croissant jusqu'à 1 si et seulement si tout idéal à droite dans Ω est monogène (un sous-module d'un Ω-module monogène est isomorphe à un quotient d'un idéal à droite de Ω).

Tout module libre sur un anneau principal est croissant (puisque tout sous-module est libre et de rang inférieur ou égal).

Lemme 2 : Tout strict Ω-espace affine E de rang fini et croissant est noethérien donc plein d'hyperplans.

Plus généralement :

Proposition 3 : Tout strict Ω-espace affine E croissant jusqu'à n fini est plein d'hyperplans jusqu'au rang $(n-1)$.

Preuve : Il reste à envisager le cas où $n < rg(E)$.
Soit P un m-sous-espace avec $m < n$, $x_1 \notin P$ et P_1 le sous-espace engendré par P et x_1 : comme par construction $rg(P_1) \leqslant (m+1) \leqslant n$, le rang de P_1 est m ou $(m+1)$. Si $rg(P_1) = m$, on considère $x_2 \notin P_1$ et le sous-espace P_2 engendré par P_1 et x_2 etc. E étant de rang supérieur à m, il existe un indice i pour lequel $rg(P_i) = (m+1) \leqslant n$. On termine alors en appliquant le lemme 2 au Ω-module P_i.

VII. 8

Soit E un strict Ω-espace affine et S l'ensemble des sous-espaces de rang positif ou nul dans E.
S, auquel on adjoint l'ensemble vide, est muni de l'intersection et de la génération pour une famille quelconque ; ainsi c'est un treillis complet pour la relation d'ordre par inclusion.
S est muni de la relation d'équivalence : P est translaté de Q. Cette relation vérifie la propriété d'Euclide :

Proposition 1 : Pour tout sous-espace P et tout point a il existe un unique sous-espace P' translaté de P et passant par (contenant) a.

Preuve : VI. 2 .

Le sous-espace engendré par les éléments P et Q de S, est noté $V(P,Q)$.

Proposition 2 : Pour tout $a \in P$, $V(P,Q)$ contient le translaté Q' de Q passant par a .

Preuve : Soit $b \in Q$: la translation $\mathscr{C}_{ba}$ transforme Q en Q' et laisse $V(P,Q)$ globalement invariant.

Lemme 1 : Soit P et Q des sous-espaces de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Il existe $a \in P$ pour lequel le translaté Q' de Q, passant par a, contient P.

i) bis : La propriété i) est vraie pour tout $a \in P$.

ii) Il existe $b \in Q$ pour lequel le translaté P' de P, passant par b, est contenu dans Q.

ii) bis : La propriété ii) est vraie pour tout $b \in Q$.

Preuve : On applique les translations $\mathscr{C}_{ab}$, $\mathscr{C}_{ba}$, $\mathscr{C}_{xa}$ et $\mathscr{C}_{yb}$ avec $x \in P$ et $y \in Q$.

Définition 1 : Deux sous-espaces sont parallèles s'ils vérifient les propriétés équivalentes de ce lemme 1.

Tout point est parallèle à tout sous-espace.
Si P et Q sont parallèles ou bien $P \subset Q$ ou bien $Q \subset P$ ou bien $P \cap Q = \emptyset$.

On note respectivement p, q, v les rangs des sous-espaces P, Q, V(P,Q) et on suppose $p \leqslant q$.

Proposition 3 : Si P et Q sont parallèles : $v \leqslant q+1$.

Preuve : Si $a \in P$ et $b \in Q$, V(P,Q) est égal à l'un des deux sous-espaces V(a,Q) ou V(P,b) (proposition 2).

Si E est croissant jusqu'à (q+1) et P est parallèle à Q, tout translaté de P qui rencontre Q est contenu dans Q et V(P,Q) est égal à q ou (q+1).

Définition 2 : Deux sous-espaces parallèles ou sans point commun sont pseudo-parallèles.

Soit P et Q des sous-espaces : comme V(P,Q) possède un système de (p+q+2) générateurs, $v \leqslant (p+q+1)$.

Proposition 4 : Lorsque $v = p+q+1$, P et Q sont pseudo-parallèles.

Preuve : Si $a \in P \cap Q$, il est générique pour P et Q (VII. 6 Proposition 1) donc V(P,Q) peut être engendré par (p+q+1) générateurs ce qui est absurde.

Définition 3 : Lorsque $v = p+q+1$, P et Q sont obliques.

Si P et Q sont obliques ils sont sans point commun et pour $p \neq 0$, non parallèles (proposition 3).

On considère maintenant un strict Ω-espace affine E plein d'hyperplans jusqu'au rang n fini (VII. 7 Définition 3) avec $n < rg(E)$.
P et Q sont dans la suite des hyperplans avec $p \leqslant q \leqslant n$.

Proposition 5 : P et Q étant des hyperplans parallèles :

$P \subset Q$ si et seulement si : $v = q$.

$P \cap Q = \emptyset$ si et seulement si : $v = q+1$.

Preuve : On sait (Proposition 3) que $v \leqslant q+1$.
Par VII. 7 Théorème, on voit que $q \leqslant v$ et si $v = q$, $V(P,Q) = Q$.
Enfin par le Lemme 1, si $P \cap Q \neq \emptyset$ alors $P \subset Q$.

Soit Q un q-hyperplan : le sous-espace engendré par un (p+1)-uplet générique de Q (VII. 6) n'est pas nécessairement un hyperplan.

Exemple 1 : Par hypothèse, dans l'anneau Ω il existe $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \neq \omega$ tels que $\alpha_1\alpha = 1$ et $\alpha_2\alpha = \omega$.
Soit Q un plan de E avec un système générateur minimal : $\{k, b_1, b_2\}$.
Dans le Ω-module E_k, Q est l'ensemble des $b_1^* \varepsilon_1 \oplus b_2^* \varepsilon_2$.
Posant $c = b_1^* \alpha_1 \oplus b_2^* \alpha_2$, on voit que $c * \alpha = b_1$, ce qui prouve que $V(k,b_1)$ n'est pas une droite.
Cependant :

Proposition 6 : Tout p-hyperplan contenant un (p+1)-uplet générique de Q est contenu dans Q.

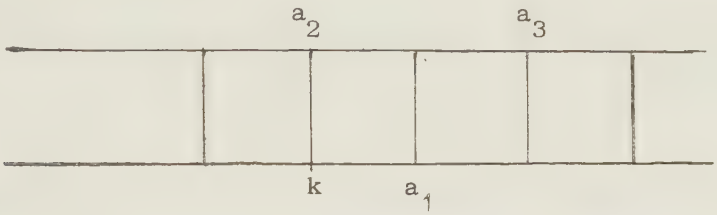
Preuve : Soit P un p-hyperplan qui contient la partie $\{a_1, \ldots, a_{p+1}\}$ d'un système générateur $\{a_1, \ldots, a_{q+1}\}$ de Q : le sous-espace engendré par P, $a_{p+2}, \ldots, a_{q+1}$, est de rang inférieur ou égal à q et contient Q donc est égal à Q.

Définition 4 : P et Q sont pseudo-sécants lorsque leur intersection n'est pas vide.

P et Q sont sécants lorsque leur intersection est un hyperplan.

L'intersection M de deux hyperlans pseudo-sécants P et Q est un sous-espace ; son rang m n'a pas nécessairement de rapport direct avec p et q.
Si E est croissant : $m \leqslant p$.

Exemple 2 : Soit E le Z-module : $Z \times Z/2$ et $k = (0,0)$, $a_1 = (1,0)$, $a_2 = (0,1)$, $a_3 = (2,1)$.



On vérifie que $V(k,a_1)$, $V(k,a_2)$, $V(k,a_3)$ sont des droites de E que l'on note respectivement : D_1 , D_2 , D_3 .
L'intersection de D_1 et D_2 est k : elles sont sécantes.
L'intersection de D_1 et D_3 est le 1-sous-espace engendré par k et (4,0) : elles sont pseudo-sécantes.
Soit D_3' la parallèle à D_3 passant par a_1 : D_3' et D_2 sont pseudo-parallèles et non parallèles.

Proposition 7 : L'intersection de deux hyperplans sécants distincts P et Q est un hyperplan dont le rang est inférieur à p ($\leqslant q$).

Preuve : VII. 7 Théorème.

Corollaire : Lorsqu'une droite et un hyperplan sont sécants et non parallèles ils ont un unique point commun.

En particulier deux droites sécantes distinctes ont un unique point commun.

VII. 9

En VII. 3 nous avons noté : $Staff_\Omega$ (resp. $Pond_\Omega$) la catégorie des stricts Ω-espaces affines (resp. Ω-espaces pondérés).
On note ici Aff_Ω la catégorie des Ω-espaces affines classiques, définie comme suit :
Un objet de Aff_Ω est un couple (A,V) où A est un ensemble et V un Ω-module avec une application : $(a,v) \in A \times V \to a * v \in A$, vérifiant :
i) $(a * v) * v' = a * (v \oplus v')$
ii) Pour tous a,b de A il existe un unique $v \in V$, noté $\overrightarrow{ab}$ tel que : $a * v = b$.
Un morphisme de (A,V) dans (A',V') est un couple (ψ,ϕ) où ψ est une application de A dans A' et ϕ une application linéaire de V dans V' telles que : $(a * v)\,\psi = (a)\,\psi * (v)\,\phi$.

Lemme 1 : Il existe un foncteur naturel S de Aff_Ω dans $Staff_\Omega$.

Preuve : Soit (A,V) un Ω-espace affine classique et $k \in A$; l'application $a \in A \to \overrightarrow{ka} \in V$ étant une bijection, on peut munir A d'une structure de strict Ω-espace affine (par transport de structure) isomorphe à celle définie canoniquement sur V : (a,b,α,c) est l'image réciproque de $\overrightarrow{ka}\,\alpha \ominus \overrightarrow{kb}\,\alpha \oplus \overrightarrow{kc} = \overrightarrow{ba}\,\alpha \oplus \overrightarrow{kc}$; c'est donc $c * (\overrightarrow{ba}\,\alpha)$, qui est indépendant de k.
Soit (ψ,ϕ) un morphisme de (A,V) dans (A',V') :
$((a,b,\alpha,c)\,\psi = (c)\,\psi * (\overrightarrow{ba})\,\phi\,\alpha = ((a)\,\psi\ ,\ (b)\,\psi\ ,\ \alpha\ ,\ (c)\,\psi)$
puisque $(\overrightarrow{ba})\,\phi = \overrightarrow{(b)\,\psi\ (a)\,\psi}$.

Lemme 2 : Il existe un foncteur naturel $\mathcal{A}$ de $Staff_\Omega$ dans Aff_Ω.

Preuve : Soit E un strict Ω-espace affine et T le Ω-module des translations de E (III. 4 Proposition 2). (E,T), muni de l'action canonique de T sur E : $a\,\mathscr{t}_{hk} = a - h + k$, est un objet de Aff_Ω.
Soit prime : $a \in E \to a' \in F$, un morphisme de stricts Ω-espaces affines ; si μ est défini par : $(\mathscr{t}_{hk})\,\mu = \mathscr{t}_{h'k'}$, alors : $(a\,\mathscr{t}_{hk})' = a' - h' + k' = a'(\mathscr{t}_{hk})\,\mu$.
Il reste à montrer que l'application μ est linéaire :
$(\mathscr{t}_{hk}\,\mathscr{t}_{xy})\,\mu = \mathscr{t}_{h'(h-x+y)'} = \mathscr{t}_{h'(k'-x'+y')} = (\mathscr{t}_{hk})\,\mu\ (\mathscr{t}_{xy})\,\mu$
$(\mathscr{t}_{hk}\,\alpha)\,\mu = \mathscr{t}_{h'(k,h,\alpha,h)'} = \mathscr{t}_{h'(k',h',\alpha,h')} = (\mathscr{t}_{hk})\,\mu\,\alpha$.

Théorème : Les catégories Aff_Ω et $Staff_\Omega$ sont équivalentes.

Preuve : Il est immédiat que $\mathcal{A}$ puis $\mathcal{S}$ est l'identité sur $Staff_\Omega$ (lemmes 1 et 2).
Réciproquement, appliquons $\mathcal{S}$ puis $\mathcal{A}$ à (A,V) : d'une part T et V sont isomorphes pour : $\mathscr{C}_{hk} \longleftrightarrow \overrightarrow{hk}$, d'autre part : $a\mathscr{C}_{hk} = a * \overrightarrow{hk}$. Identifiant T et V par cet isomorphisme et appliquant $\mathcal{S}$ puis $\mathcal{A}$ à (ψ,ϕ) on voit que μ est ϕ lorsque prime est ψ.

Corollaire : Les catégories Aff_Ω et $Pond_\Omega$ sont équivalentes.

Dans la publication n° 9, 1971, du groupe d'algèbre de la Faculté des Sciences de Toulouse, J.L. Gaillard a défini la catégorie des Ω-espaces n-barycentrés pour n fixé, fini ou infini et montré que cette catégorie est équivalente à Aff_Ω.
Explicitons ici pour les objets, le cas le plus simple qui correspond dans ce papier, à $n = 4$:
G est un Ω-espace 4-barycentré s'il existe une fonction de $(G \times \Omega)^4$ dans G noté $\sum_i a_i \alpha_i$ et telle que :

i) $\sum_i a_i \alpha_i$ est défini si et seulement si : $\alpha_1 \overset{\bullet}{+} \alpha_2 \overset{\bullet}{+} \alpha_3 \overset{\bullet}{+} \alpha_4 = 1$.

ii) $\sum_j (\sum_i a_i \alpha_{ij}) \beta_j = \sum_i a_i (\alpha_{i1} \beta_1 \overset{\circ}{+} \alpha_{i2} \beta_2 \overset{\circ}{+} \alpha_{i3} \beta_3 \overset{\circ}{+} \alpha_{i4} \beta_4)$.

iii) Si tous les α_i sont nuls sauf α_{i_o} (qui vaut donc 1) alors :
$\sum_i a_i \alpha_i = a_{i_o}$.

Signalons que dans le fascicule n° 12, 1973, du groupe d'algèbre de la Faculté des Sciences de Toulouse, L. Bénéteau a étudié les espaces n-barycentrés pour $n \leqslant 3$ et que dans la note 7, références de l'introduction, nous avons présenté les notions de n-opération pondérée par Ω et de loi pondérée par Ω.

Complément du 28 Septembre 1974 : L. BENETEAU, thèse de Spécialité : Etude algébrique des espaces barycentrés et des espaces planairement affines (Université de TOULOUSE).

VIII - DE LA GEOMETRIE A L'ALGEBRE 1

PAR LA METHODE D'ARTIN

VIII. 1

Ce paragraphe est une introduction très développée : il est à la mesure du sujet traité...

La géométrie mise en place au chapitre précédent si situe dans un constexte où l'on définit et étudie les êtres géométriques à partir d'une structure algébrique donnée.
Dans ce chapitre nous utiliserons la démarche qui va des axiomes de géométrie à la construction d'une structure algébrique associée. On sait que le modèle en ce domaine est contenu dans le célèbre livre : Algèbre géométrique, de E. Artin. Nous allons ici reprendre sa méthode et généraliser ses résultats ; bien entendu nous ferons, le moment venu, le lien avec les autres études récentes se rapportant à certaines des structures étudiées.
Disons concrètement que, comme dans [4], nous considérons une géométrie avec des points et des droites, géométrie affine, en ce sens que la famille des droites est munie d'une relation de parallélisme vérifiant l'axiome d'Euclide.
Pour E. Artin deux droites sont parallèles si elles sont confondues ou sans point commun. Comme nous ne voulons pas exclure l'éventualité de droites non parallèles et sans point commun, nous devrons adopter une autre définition du parallélisme. Dans certaines géométries (voir par exemple [12] de E. Sperner) le parallélisme peut n'être ni symétrique ni transitif ; mais au chapitre VII deux droites sont parallèles si l'une est translatée de l'autre, ce qui nous amène à imposer au parallélisme d'être une relation d'équivalence.
Dans le modèle du chapitre VII il peut exister plusieurs droites passant par deux points donnés ; les "Plans affines de Hjelmslev" systématisent cette possibilité (voir par exemple : [9] de H. Lüneburg). Citons aussi dans ce contexte : [3] de H.J. Arnold.
Cependant nous adopterons l'axiome suivant :
Deux points distincts déterminent une unique droite, car c'est un outil puissant qui permet d'obtenir des résultats substantiels avec de faibles moyens annexes ; d'autre part il s'insère naturellement dans le cadre de la géométrie traditionnelle ; enfin, dans le contexte du chapitre VII, nous devrions pouvoir préciser les caractéristiques des stricts espaces affines qui donnent lieu à de telles géométries.
Ajoutons que, par hypothèse, chaque droite aura plus d'un point et l'espace aura plus d'une droite.

La structure ainsi définie est appelée incidence affine ou plus simplement incidence.
La notion de sous-incidence permet de construire des exemples variés (ce qui est important dans toute construction axiomatique) et d'établir par plongement un certain nombre de propriétés.

Les dilatations qui sont définies comme dans [4] ont un rôle fondamental. Nous établissons tout d'abord la structure du demi-groupe des dilatations d'une incidence puis nous examinons deux cas particuliers importants : celui des homothéties et celui des translations.
L'étape suivante qui veut préciser les propriétés de l'ensemble T des translations consiste à distinguer certaines incidences selon qu'elles sont à vrais parallélogrammes, faiblement arguésiennes ou translatives.
Pour une incidence faiblement arguésienne possédant des translations de traces différentes, T est canoniquement un demi-groupe unitaire, simplifiable et commutatif.
Pour une incidence translative E , T est un groupe commutatif et E est un strict groupe ternaire. Ces résultats fondamentaux rejoignent en fait ceux qui ont été établis par J. André dans [1] à propos des Translationsstruktur et des Gruppenpartition. D'ailleurs et d'une façon générale les translations ont été étudiées par de nombreux auteurs (voir par exemple les bibliographies des articles que nous citons).

Par contre il ne semble pas que jusqu'à présent les symétries aient particulièrement retenu l'attention. On peut dire ici que la structure de strict groupe ternaire s'est avérée capitale : on sait, en effet, par I. 11 théorème 2 que les symétries y jouent un rôle au moins aussi important que les translations. Nous avons donc étudié les symétries d'une incidence : sous l'hypothèse faiblement arguésienne les résultats obtenus sont remarquables ; pour une incidence translative on retrouve la structure de strict groupe ternaire.

L'étape suivante pour une incidence translative E, rejoint les résultats de J. André [2] généralisant ceux de E. Artin [4] ; elles consiste à présenter un anneau Ω et une structure de strict Ω-espace affine sur E. Nous le faisons par une méthode différente de celles de J. André ou E. Artin, méthode essentiellement géométrique utilisant directement les homothéties de centre donné et faisant intervenir une opération canonique : l'opération affine.

Nous établissons des propriétés de Ω, de E ou du Ω-module $E_k : \Omega$ est sans diviseur de zéro ; 2 est inversible dans Ω si et seulement si toute paire de points de E possède un milieu.
E est sans torsion de rang supérieur à 1 et les droites de E passant par k constituent une famille partitive de sous-modules de E_k. Réciproquement, à partir d'un anneau A sans diviseurs de zéro et d'un A-module sans torsion, non monogène, muni d'une famille partitive de sous-modules on construit une incidence translative E ; de plus A se plonge dans Ω.

Nous introduisons ensuite d'autres axiomes tels que :
*) Existence de vrais trapèzes.
*) Grand théorème de Desargues.
*) Isomorphisme des sous-espaces que sont les droites d'une incidence translative,
etc, et étudions leurs rapports mutuels.
En particulier nous montrons comment on peut retrouver la géométrie classique à partir d'un corps construite par H. Lenz [7] sur certaines incidences arguésiennes qui vérifient un axiome d'existence de vrais trapèzes.

Une classe importante d'incidences translatives est constituée par celles pour lesquelles toute droite est (un sous-espace) de rang 1 : nous les appelons géométries affines généralisées. L'adaptation de cette notion aux incidences fait apparaître la classe des incidences à générateurs.
Pour les incidences à générateurs nous présentons un théorème de Pappus généralisé qui correspond à la commutativité du demi-groupe des homothéties de centre fixé et un théorème de Pappus très généralisé duquel dépend pour une géométrie affine généralisée E l'existence d'un corps des quotients à droite pour Ω. Dans ce cas E est reliée par plongement à une géométrie classique à partir d'un corps.
L'étude des droites d'une géométrie affine généralisée montre que ce sont les 1-sous-espaces maximaux et que ces sous-espaces sont tous isomorphes. En particulier toutes les droites ont le même cardinal ; on sait que cette propriété est choisie comme hypothèse initiale dans certaines constructions axiomatiques (citons par exemple les espaces de Sperner).
L'étude des géométries affines généralisées conduit à deux caractérisations mettant en relief des classes confondues de modules qui n'avaient pas semble-t-il jusqu'à présent retenu l'attention :

*) Les modules qui possèdent la propriété 1-maximale partitive.
*) Les modules à P.D.G. (notion analogue à celle de P.G.C.D.).

La propriété algébrique pour une incidence translative pointée d'être somme (resp. ——— directe) finie de droites considérées comme sous-modules fait apparaître une classe importante d'incidences : celles qui possèdent un enchaînement (resp. ——— direct). On fait alors le lien avec le travail de R. Permutti [10] (lui-même dans la ligne tracée par C.J. Everett [5]) concernant les géométries affines généralisées qui possèdent un enchaînement direct ; ceci nous amène à préciser certaines propriétés des anneaux à P.G.C.D.

La construction d'une géométrie affine généralisée peut se faire avec des axiomes concernant non seulement les points et les droites mais aussi d'autres sous-espaces géométriques au premier rang desquels se trouvent les plans. Aussi avons-nous abordé la notion de sous-espace géométrique d'une incidence. Tout sous-espace géométrique d'une incidence translative est un sous-espace affine mais nous ne savons pas comment sont caractérisés les sous-espaces affines qui sont des sous-espaces géométriques si ce n'est que (par définition) avec 2 points a et b ils contiennent la droite ab. A ce sujet nous parlons de l'étude de G. Pizzarello [11] sur les sous-espaces d'une géométrie de Permutti.

Nous terminons en considérant pour les plans d'une incidence deux axiomes π 1 et π 2 inspirés par la géométrie traditionnelle ; après avoir établi leur équivalence, nous montrons qu'une incidence arguésienne vérifiant π 1 ou π 2 est une géométrie classique à partir d'un corps. Ces propriétés permettent de situer dans notre contexte les constructions de S. Iyanaga et K. Matsuzaka [6] (une généralisation au cas n-dimensionnel de la construction d'Artin) et de H. Levi [8]. Dans ces deux cas, en effet, les axiomes portent sur tous les sous-espaces géométriques et la structure algébrique obtenue est un strict espace affine sur un corps.

VIII. 2

E est un ensemble dont les éléments notés : a, b, c, ..., sont encore appelés points.
On considère aussi une famille de parties de E, à plus d'un élément, appelées droites de E.

La famille des droites de E est munie d'une relation d'équivalence le parallélisme, notée : D//D' (la droite D est parallèle à la droite D').

L'expression : "D passe par a" signifie : "la droite D contient le point a".
L'expression : "deux points" sous-entend généralement : "distincts".

Axiome 1 : Etant donné deux points a et b il existe une unique droite passant par a et b.

La droite déterminée par a et b est notée ab.

Axiomes 2 : Etant donné un point a et une droite D, il existe une unique droite D' passant par a et parallèle à D.

Il résulte de ces deux axiomes la :

Proposition 1 :

i) Si deux droites ont deux points communs, elles sont confondues.
ii) Si deux parallèles ont un point commun, elles sont confondues.

Deux droites dont l'intersection n'est pas vide sont sécantes.
Deux droites distinctes et sécantes ont un seul point commun (Proposition 1, i)).
Deux droites sont pseudo-parallèles si leur intersection est vide ou si elles sont confondues. Deux droites parallèles sont pseudo-parallèles (Proposition 1, ii)).
Une partie de E est alignée si elle est contenue dans une droite.

Axiome 3 : Il existe dans E trois points non alignés.

Soit D une droite : par l'axiome 2, l'ensemble des droites parallèles à D constitue une partition de E ; on l'appelle direction (de D). Par l'axiome 3, il existe dans E trois directions distinctes.

Définition 1 : L'ensemble E avec sa famille de droites munie de la relation de parallélisme et sous les axiomes 1, 2, 3 est appelé une incidence (affine).

Au lieu de : "E est une incidence", on dira parfois : "E vérifie les axiomes 1, 2, 3".

Exemple 1 : Soit Γ un corps et E un strict Γ-espace affine distinct de Γ : E muni des droites et de la relation de parallélisme habituelles est une incidence.

Définition 2 : On appelle géométrie classique à partir du corps Γ toute incidence E obtenue comme dans l'exemple précédent.

Si le corps Γ est fini avec card $\Gamma = \gamma$, alors toute droite d'une géométrie classique à partir de Γ possède γ points. En particulier si $\Gamma = \mathbb{Z}/2$ toute droite ne possède que 2 points ; lorsque E est de dimension 2, l'incidence considérée a 4 points et 6 droites.
On remarquera qu'il résulte des axiomes 1, 2, 3 qu'une incidence ne peut avoir moins de 4 points ou moins de 6 droites.

Le contexte dans lequel on se place est maintenant clair ; voyons-en rapidement deux aspects plus généraux :
Une prégéométrie est un ensemble (dont les éléments sont appelés points) muni d'une famille de parties appelées droites et d'une relation sur les droites : le parallélisme ; chaque droite contient plus d'un point et il y a plus d'une droite.
Une préincidence est une prégéométrie qui vérifie l'axiome 1 et pour laquelle le parallélisme est une relation d'équivalence.
Ainsi une incidence est une préincidence qui vérifie l'axiome 2.
Une partie d'une prégéométrie est non banale si elle contient trois points non alignés.
Soit E une prégéométrie et E' une partie non banale de E ; on appelle droites de E' les parties de E', à plus d'un élément, de la forme : $D' = D \cap E'$ où D est une droite de E. Lorsque E vérifie l'axiome 1 la correspondance : D', D, ainsi établie entre les droites de E' et les droites de E qui rencontrent E' en plus d'un point, est biunivoque, ce qui permet de munir cette famille de droites sur E' de la relation induite par la relation de parallélisme sur les droites de E. Nous venons donc d'associer à la partie non banale E' une structure de prégéométrie ; on remarquera qu'elle vérifie l'axiome 1 puisque E le vérifie.

Maintenant si E est une préincidence la relation induite sur les droites de E' est une relation d'équivalence donc E' est canoniquement munie d'une structure de préincidence que l'on appelle sous-préincidence de E.

Définition 3 : Soit E une préincidence et E' une partie de E : E' est une une sous-incidence de E si c'est une sous-préincidence qui vérifie l'axiome 2.

On voit que :

Proposition 2 : Soit E une incidence et E' une partie de E. E' est une sous-incidence de E si et seulement si :

i) E' contient trois points non alignés.

ii) Pour tous a, b, c de E' non alignés, la parallèle à ab par c dans E rencontre E' en un point autre que c.

Corollaire : Soit E une incidence et E' une partie de E qui contient trois points non alignés :
Si aucune droite de E ne rencontre E' en un seul point, alors E' est une sous-incidence.

La notion de sous-incidence permet en particulier de constuire des incidences à partir d'incidences connues.

Exemples 2 :

i) Soit Γ un corps et Ω un sous-anneau de Γ : le strict Ω-espace affine Ω^n plongé dans Γ^n est d'après la proposition 2 une sous-incidence de l'incidence Γ^n de l'exemple 1, pour $n > 1$. En particulier, Z étant l'anneau des entiers relatifs, pour tout $n > 1$, Z^n est canoniquement une incidence.

ii) Soit E' la partie de Z^2 ensemble des (a_1, a_2) avec a_1, a_2 non tous deux positifs : par le corollaire, E' est une sous-incidence de Z^2.

Remarque : Une droite de R^2 passant par $(0, 0)$ et de pente irrationnelle, n'a qu'un seul point dans Z^2 donc la condition du corollaire n'est pas nécessaire.

VIII. 3

On considère maintenant le demi-groupe unitaire $(E)\mathcal{A}$ des applications de E dans E ; l'application α conserve la direction si $(a)\,\alpha \neq (b)\,\alpha$ implique : $(a)\,\alpha\ (b)\,\alpha // ab$.

Définition 1 : Soit E une incidence.
Une dilatation de E est une application qui conserve la direction.

Il en résulte qu'une dilatation conserve l'alignement.
En particulier l'image d'une droite par une dilatation est une partie alignée.

Exemple :

i) L'application identique de E dans E, notée 1, est une dilatation.

ii) Pour chaque $k \in E$ l'application : $a \in E \to k \in E$, est une dilatation, zéro à droite dans $(E)\mathcal{A}$.

Lemme 1 : L'ensemble des dilatations d'une incidence E est un sous-demi-groupe de $(E)\mathcal{A}$.

Preuve : Soit α et β des dilatations : si $(a)\,\alpha\beta \neq (b)\,\alpha\beta$ alors $(a)\,\alpha \neq (b)\,\alpha$ et $(a)\,\alpha\beta\ (b)\,\alpha\beta // (a)\,\alpha\ (b)\,\alpha // ab$.

L'exemple précédent montre que le demi-groupe des dilatations de E est unitaire et contient des zéros à droite.
Soit α une dilatation zéro à droite, ε la dilatation qui envoie tout a de E sur $k \in E$ et h l'image de k par α : nécessairement α envoie tout a de E sur h. Ainsi l'ensemble des zéros à droite du demi-groupe des dilatations est équipotent à E.

Lemme 2 : Toute dilatation non zéro à droite est une application injective.

Preuve : Si α est une dilatation pour laquelle $(a)\,\alpha = (b)\,\alpha = k \neq (c)\,\alpha$ avec a, b, c non alignés alors ac et bc, tous deux parallèles à $k(c)\,\alpha$ sont parallèles, ce qui est absurde.

Une application injective est un élément simplifiable à droite dans $(E)\mathcal{A}$.

Les applications inversibles dans $(E)\mathcal{H}$, et dans tout sous-demi-groupe contenant 1, sont les applications bijectives.

Lemme 3 : Si la dilatation α est bijective alors α^{-1} est une dilatation.

Preuve : On a : (a) α^{-1} α (b) α^{-1} α // (a) α^{-1} (b) α^{-1} puisque α est une dilatation.

Proposition : Soit E une incidence. Toute dilatation est déterminée par les images de deux points.

Preuve : Soit α une dilatation, $a \neq b$ et c un point de E non sur ab : (c) α est l'unique intersection de la parallèle à ac par (a) α et à bc par (b) α.
Pour un point d de ab on détermine (d) α de la même manière en utilisant a et c.

Corollaire 1 : Une dilatation qui a deux points fixes est la dilatation neutre 1.

Corollaire 2 : Toute dilatation qui n'est pas zéro à droite est simplifiable à gauche dans le demi-groupe des dilatations (lemme 1).

Preuve : Soit α, β, γ des dilatations telles que : $\alpha\beta = \alpha\gamma$: s'il existe a et b pour lesquels (a) $\alpha \neq$ (b) α alors β et γ coïncident.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le :

Théorème : Soit E une incidence et W l'ensemble des dilatations de E :
W est canoniquement un demi-groupe unitaire ;
l'ensemble des zéros à droite de W est équipotent à E ;
tout élément de W, non zéro à droite, est simplifiable (à gauche et à droite) ;
un élément de W est inversible (dans W) si et seulement si c'est une application bijective.

VIII. 4

Définition 1 : Soit E un incidence et $k \in E$:

Une homothétie de centre k est une dilatation fixe sur k.

La dilatation neutre et la dilatation zéro à droite : $a \in E \to k \in E$ sont des homothéties de centre k.

Toute homothétie distincte de 1 admet un unique point fixe.

Il résulte de VIII. 3, Proposition, le :

Lemme 1 : Toute homothétie de centre k est déterminée par l'image d'un point.

Compte tenu de VIII. 3, théorème on voit que :

Proposition 1 : Soit E une incidence et $k \in E$:

L'ensemble des homothéties de centre k est canoniquement un demi-groupe unitaire avec zéro pour lequel tout élément non nul est simplifiable.

Lemme 2 : Soit E une incidence et α une dilatation de E.

(a) $\alpha \in ab$ implique (b) $\alpha \in ab$.

Définition 2 : On appelle trace de la dilatation α de E toute droite qui contient (a) α dès qu'elle contient a.

Toute droite de E est une trace de 1.

Pour une homothétie de centre k toute droite passant par k est une trace puisque $(k)\alpha = k$. La réciproque résulte du lemme 2.
On appelle faisceau sécant (resp. parallèle) de droites l'ensemble des droites passant par un point donné (resp. qui ont une direction donnée). Ainsi :

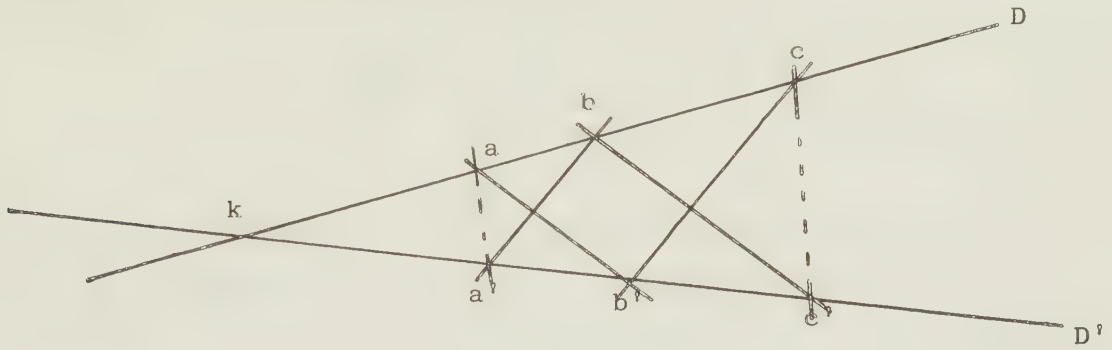
Proposition 2 : Soit α une dilatation distincte de 1 ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) α est une homothétie.

ii) Les traces de α constituent un faisceau sécant.

iii) Deux traces de α distinctes sont sécantes.

On appelle théorème de Pappus la propriété suivante :
Soient D et D' deux droites distinctes passant par k et soit a, b, c des points de D, a', b', c' des points de D', tous distincts de k :
ab' // bc' et ba' // cb' impliquent aa' // cc'.



Comme dans [4] on montre que si le théorème de Pappus est vérifié, alors le demi-groupe des homothéties de centre k est commutatif.

VIII. 5

Lemme 1 : Soit E une incidence, E' une sous-incidence de E, α une dilatation de qui respecte E' et α' sa restriction à E' :
α' est une dilatation de E'.

Preuve : A chaque direction dans E' est canoniquement associée une unique direction dans E.

En particulier si α est une homothétie, de centre $k \notin E'$, distincte de 1, alors α' est une dilatation de E' sans point fixe.

Exemple 1 : Dans Z^2 l'application $(a_1, a_2) \to (3\,a_1 - 1,\ 3\,a_2 - 1)$ est une dilatation sans point fixe.
Les traces de cette dilatation ne constituent ni un faisceau sécant ni un faisceau parallèle : elles sont pseudo-parallèles.

Définition : Soit E une incidence :
Une translation de E est ou bien 1 ou bien une dilatation dont les traces sont parallèles.

Exemple 2 : Soit E l'incidence de VIII. 2, Exemple ii).
L'application : $(a_1, a_2) \to (a_1 - 1, a_2 - 1)$ est une translation ; elle n'est pas surjective.

Proposition 1 : Toute translation d'une incidence :
i) Est déterminée par l'image d'un point.
ii) Est une application injective.

Preuve : i) Soit α une translation et $(a)\alpha$ l'image d'un point a : si $(a)\alpha = a$, α est nécessairement 1 ; si $(a)\alpha \neq a$, on considère $b \notin a(a)\alpha$: $(b)\alpha$ est l'unique intersection de la parallèle à ab par $(a)\alpha$ et de la trace passant par b. On termine par VIII. 3, Proposition.
ii) VIII. 3, Lemme 2.

Compte tenu de la conservation du parallèlisme des traces, les deux lemmes suivants sont immédiats.

Lemme 2 : Si une translation est bijective, alors sa dilatation réciproque est une translation.

Lemme 3 : La dilatation composée de deux translations de mêmes traces est une translation.

Il n'est pas certain que la composée de deux translations soit toujours une translation.

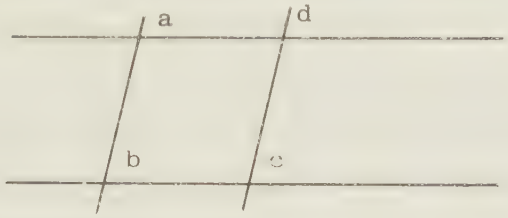
Proposition 2 : Si α et β sont des translations distinctes de 1 et de traces différentes, alors $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Preuve : Partons d'un point a avec $b = (a)\alpha$ et $c = (b)\beta$: a, b, c ne sont pas alignés. Soit $d = (a)\beta$: de $ad \parallel bc$ et $ab \parallel dc$ résulte $c = (d)\alpha$.

On remarquera que cette preuve fait intervenir le quadruple de points non alignés (a, b, c, d) pour lesquels : $ab \parallel cd$ et $ad \parallel bc$.

VIII. 6

Soit E une incidence et (a, b, c, d) un quadruple de points de E : on dit que (a, b, c, d) est un vrai parallélogramme lorsque a, b, c, d ne sont pas alignés et que ab // cd et ad // bc.



Soit E une incidence et (a, b, c) un triple de points de E non alignés : la parallèle à ab par c et la parallèle à bc par a ne sont pas parallèles ; lorsqu'elles sont sécantes elles ont en commun un unique point d : on dit que (a, b, c, d) est le vrai parallélogramme déterminé par (a, b, c) ; d est appelé le quatrième sommet du vrai parallélogramme construit sur (a, b, c).

Il résulte des propriétés des translations (définition d'une dilatation et parallélisme des traces) que s'il existe une translation α qui applique b sur c, (a) α est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur (a, b, c). Plus généralement on voit que :

Lemme 1 : Soit E une incidence et α une dilatation distincte de 1 ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) α est une translation.

ii) Pour tous points a, b non sur une même trace de α :

(a, b, (b) α, (a) α) est un vrai parallélogramme.

Une dilatation non zéro à droite (VIII. 3) transforme des points distincts en des points distincts et des points non alignés en des points non alignés : il résulte alors des définitions que :

Lemme 2 : Soit E une incidence et (a, b, c, d) un vrai parallélogramme. Si α est une dilatation non zéro à droite, alors ((a) α, (b) α, (c) α, (d) α) est un vrai parallélogramme.

Soit E une incidence : l'existence du quatrième sommet d du parallélogramme construit sur un triple (a, b, c) de points non alignés, fait l'objet de l'axiome suivant :

Axiome 4' (du vrai parallélogramme) : Tout triple de points non alignés détermine un vrai parallélogramme.

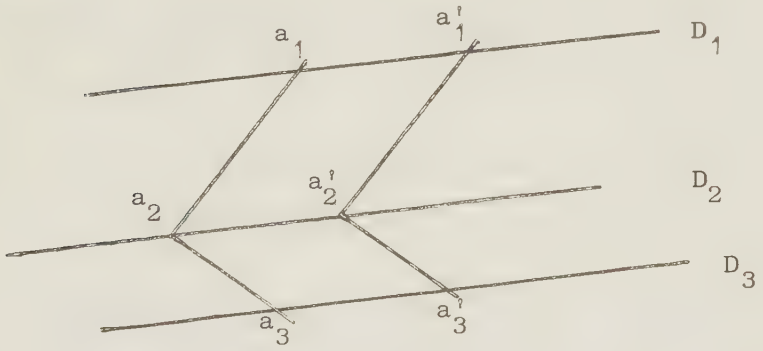
Définition 1 : Une incidence à vrais parallélogrammes est une incidence qui vérifie l'axiome 4'.

Z^2 est une incidence à vrais parallélogrammes.
L'incidence de VIII. 2, Exemple 2, ii), est une sous-incidence de Z^2 et ne vérifie pas l'axiome 4'.

Proposition 1 : Pour une incidence à vrais parallélogrammes toute translation est bijective.

Preuve : On se donne un point y et une translation $\alpha \neq 1$; soit a non situé sur la trace de α qui passe par y et $b = (a)\,\alpha$: par l'axiome 4' il existe x pour lequel (a, b, y, x) est un parallélogramme ; donc $y = (x)\,\alpha$.

Axiome 4'' : Soit pour $i \in \{1, 2, 3\}$ les droites D_i parallèles distinctes et les couples de points a_i, a_i' sur D_i :
$a_1\,a_2 \,//\, a_1'\,a_2'$ et $a_2\,a_3 \,//\, a_2'\,a_3'$ impliquent $a_1\,a_3 \,//\, a_1'\,a_3'$.



Cette propriété est un des deux théorèmes de Desargues ; on le qualifie de petit ou faible pour le distinguer de l'autre à supports concourants.

Définition 2 : Une incidence est faiblement arguésienne si elle vérifie l'axiome 4''.

On voit que :

Proposition 2 : Toute sous-incidence d'une incidence faiblement arguésienne est faiblement arguésienne.

Ainsi l'incidence de VIII. 2, Exemple 2, ii), est faiblement arguésienne.

Théorème : Soit E une incidence faiblement arguésienne qui possède des translations ayant des traces différentes :
L'ensemble des T translations est canoniquement un demi-groupe unitaire simplifiable commutatif.

Preuve : Par définition, 1 est une translation.
Nous considérons maintenant des translations distinctes de 1.
α et β ont des traces différentes : soit $a \in E$,
$b = (a)\,\alpha$, $c = (b)\,\beta$ et $a' \in E$, $b' = (a')\,\alpha$, $c' = (b')\,\beta$.
Si b' n'est si sur ab ni sur bc, il résulte de l'axiome 4'' : $a'c' \,//\, ac$.
Si b' est sur ab ou bc le raisonnement précédent s'applique en remplaçant a par un autre point de la trace ac pour la dilatation .
Ainsi toutes les traces de $\alpha\,\beta$ sont parallèles : c'est une translation.
De plus (VIII. 5, Proposition 2) : $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$.

α et β ont les mêmes traces : $\alpha\,\beta$ est une translation (VIII. 5, Lemme 2).
Par hypothèse il existe une translation γ dont les traces sont différentes de celles de $\alpha\,\beta$ et les traces de $\beta\,\gamma$ sont distinctes de celles de α, donc :
$(\alpha\,\beta)\,\gamma = \alpha(\beta\,\gamma) = (\beta\,\gamma)\,\alpha = (\gamma\,\beta)\,\alpha = \gamma(\beta\,\alpha) = (\beta\,\alpha)\,\gamma$,
ce qui implique en simplifiant par γ : $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha$.

Cette preuve montre que l'hypothèse faiblement arguésienne, suffit pour affirmer que T est un demi-groupe.

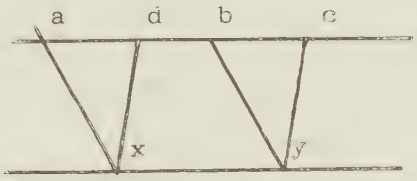
Corollaire 1 : Soit E une incidence faiblement arguésienne pour laquelle T est fini et possède deux éléments de traces différentes : T est un groupe commutatif.

Corollaire 2 : Soit E une incidence faiblement arguésienne et finie pour laquelle T possède deux éléments de traces différentes : T est un groupe commutatif.

Soit E une incidence faiblement arguésienne et a, b, c des points alignés avec a et b distincts : s'il existe x, y (non sur ab) pour lesquels (x, a, b, y) est un vrai parallélogramme et d (sur ab) pour lequel (x, d, c, y) est un vrai parallélogramme, alors le faible théorème de Désargues

montre que pour tout couple de points z, t non sur ab ou xy, (z, d, c, t) est un vrai parallélogramme si et seulement si (z, a, b, t) est un vrai parallélogramme.

Nous venons de mettre en évidence une propriété intrinsèque qui permet de définir la notion de parallélogramme aligné (a, b, c, d) lorsque a et b sont distincts.



Il reste à définir le parallélogramme (a, b, c, d) lorsque a = b : on impose c = d.

Dans tous les cas d est appelé le quatrième sommet du parallélogramme construit sur (a, b, c).

Proposition 3 : Soit E une incidence faiblement arguésienne, (a, b, c, d) un parallélogramme et α une dilatation :
((a) α, (b) α, (c) α, (d) α) est un parallélogramme.

Preuve : C'est vrai si α est zéro à droite. Supposons maintenant que α ne soit pas zéro à droite. Si a, b, c, d sont alignés avec a et b distincts, il existe x et y pour lesquels (x, a, b, y) et (x, d, c, y) sont de vrais parallélogrammes ; or (a) α, (b) α, (c) α, (d) α, sont alignés avec (a) α et (b) α distincts et ((x) α, (a) α, (b) α, (y) α), ((x) α, (d) α, (c) α, (y) α) sont de vrais parallélogrammes (lemme 2), donc ((a) α, (b) α, (c) α, (d) α) est un vrai parallélogramme.

On vérifie que :

Proposition 4 : Soit E une incidence faiblement arguésienne :
Si (a, b, c, d) et (c, d, e, f) sont des parallélogrammes, alors (a, b, f, e) est un parallélogramme.

Cette proposition énonce dans le cas général la propriété du faible théorème de Désargues.

Dans ce paragraphe, nous avons montré l'importance des axiomes 4' et 4''... Si l'on pense que la notion de géométrie affine est étroitement liée à celle de parallélogramme, alors pour ce qui concerne les incidences, le contexte qui s'impose est à vrais parallélogrammes et faiblement arguésien.

VIII. 7

Axiome 4 : Pour tous points a, b il existe une translation qui applique a sur b.

On sait (VIII. 5, Proposition 1) qu'une telle translation est unique : on la note $\mathscr{t}_{ab}$.

Lemme 1 : Toute incidence à vrais parallélogrammes et faiblement arguésienne vérifie cet axiome 4.

Preuve : On détermine la translation qui applique a sur b en associant à chaque c le quatrième sommet du parallélogramme construit sur (c, a, b).

Lemme 2 : 4 implique 4' et 4''.

Preuve : 4' résulte de ce que pour tous a, b, c non alignés, $(c)\mathscr{t}_{ba}$ est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur (a, b, c) et 4'' des égalités :

$$\mathscr{t}_{a_1 a'_1} = \mathscr{t}_{a_2 a'_2} = \mathscr{t}_{a_3 a'_3} ,$$

d'où le théorème :

Théorème 1 : Une incidence vérifie l'axiome 4 si et seulement si elle vérifie les axiomes 4' et 4''.

Les preuves précédentes montrent que sous 4 ou (4' et 4''), les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) (c, a, b, d) est un parallélogramme,

ii) $(c)\mathscr{t}_{ab} = d$,

iii) $\mathscr{t}_{ab} = \mathscr{t}_{cd}$,

iv) $\mathscr{t}_{ac} = \mathscr{t}_{bd}$.

Définition : Une incidence translative est une incidence qui vérifie l'axiome 4 (ou encore les axiomes 4' et 4'').

Exemples : i) Toute géométrie classique à partir d'un corps est une incidence translative.

ii) Z^n, pour $n > 1$, est une incidence translative.

Proposition : Soit E une incidence translative :

Toute dilatation qui possède deux traces distinctes parallèles est une translation.

Preuve : Soit D et D' des traces distinctes et parallèles pour la dilatation α et $a \in D$, $a' \in D'$: il résulte de (a) α (a') α // a a' que si (a) $\alpha = a$ alors $\alpha = 1$ et si (a) $\alpha \neq a$ alors (a', a, (a) α, (a') α) est un vrai parallélogramme. Dans ces deux cas la dilatation α coïncide avec la translation qui applique a sur (a) α (VIII. 3, Proposition).

Théorème 2 : L'ensemble T des translations d'une incidence translative est canoniquement un groupe commutatif.

Preuve : Par VIII. 6, Théorème, T est un demi-groupe commutatif et par l'axiome 4 toute translation de E est inversible.

VIII. 8

Théorème : Toute incidence translative E est un strict groupe ternaire (I. 11) pour la loi ternaire qui au triple (a, b, c) associe le quatrième sommet du parallélogramme construit avec (a, b, c).

Preuve : Soit $k \in E$. L'application $a \in E \to \mathscr{C}_{ka} \in T$ est une bijection ; par transport de structure, E est un strict groupe ternaire isomorphe au strict groupe ternaire T : la loi ternaire sur E associe à (a, b, c) l'image réciproque de $\mathscr{C}_{ka}\, \mathscr{C}_{bk}\, \mathscr{C}_{kc} = \mathscr{C}_{kd}$, où d est l'image dans E de a par $\mathscr{C}_{bc}$.

Soit E une incidence translative : conformément à I. 11, Notation 2, la loi ternaire de ce théorème sera notée : a - b + c.

Par la suite une dilatation dans le sens de VIII. 3, Définition (resp. III. 10, Définition) sera éventuellement qualifiée de géométrique (resp. algébrique).

Proposition 1 : Soit E une incidence translative :

> Pour tous a, b de E, il y a identité entre la translation géométrique et la translation algébrique qui appliquent a sur b.

Preuve : La translation géométrique $\mathscr{C}_{ab}$ applique x sur le quatrième sommet du parallélogramme construit avec (x, a, b) c'est-à-dire sur x - a + b.

En particulier quel que soit $k \in E$, le groupe binaire $(E_k, \oplus)$ avec $a \oplus b = a - k + b$, est isomorphe au groupe T de VIII. 7, Théorème 2.

Soit E une incidence translative : E' est une sous-incidence translative si c'est une sous-incidence (VIII. 2) qui est une incidence translative.
On sait (VIII. 6, Proposition 2) que toute sous-incidence d'une incidence translative est faiblement arguésienne ; par contre elle n'est pas nécessairement à vrais parallélogrammes.

Proposition 2 : Soit E une incidence translative et E' une sous-incidence de E ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E' est une sous-incidence translative de E,
ii) E' est une sous-incidence de E à vrais parallélogrammes,
iii) E' est un sous-groupe ternaire du strict groupe ternaire E,
iv) E' est globalement conservée par toute translation $\mathscr{C}_{ab}$ de E avec a et b dans E'.

Preuve : i) implique ii) : VIII. 7, Théorème 1.

ii) implique iii) : Soit a, b, c dans E'. Si $a = b$, alors $a - b + c = c$. Si a, b, c ne sont pas alignés, alors $a - b + c = d \in E'$ car (a, b, c, d) est un vrai parallélogramme. Si a, b, c sont alignés avec $a \neq b$, soit $e \in E'$ non sur ab et $e' = a - b + e$: $e' \in E'$ et $(e' - e + c) \in E'$ donc $(a - b + c) \in E'$.

iii) implique iv) : VI. 2.

iv) implique i) : VIII. 5, Lemme 1.

Soit E une incidence translative et P une sous-incidence de E : l'intersection E' des sous-incidences translatives de E qui contiennent P est, en vertu de la proposition précédente une sous-incidence translative ; E' est la sous-incidence translative engendrée par P.

Ici se présente le problème du plongement d'une incidence faiblement arguésienne dans une incidence translative...

VIII. 9

Soit E une incidence translative et W son demi-groupe des dilatations (voir III. 3, Théorème).

Dans la suite on notera : $a\alpha$, au lieu de $(a)\alpha$, l'image de $a \in E$ par $\alpha \in W$.

Lemme 1 : W opère sur le strict groupe ternaire E (VIII. 8, Théorème).

Preuve : Il résulte de VIII. 6, Proposition 3 que :
$(a - b + c)\alpha = a\alpha - b\alpha + c\alpha$.

Nous avons (au chapitre III) montré que la notion d'espace affine est liée à celle d'opération affine... Dans ce contexte nous introduisons :

Définition 1 : L'opération préaffine sur E est l'application de $E^2 \times W \times E$ dans E qui à (a, b, α, c) associe le quatrième sommet du parallélogramme construit sur $(a\alpha, b\alpha, c)$.

L'image d de (a, b, α, c) par l'opération préaffine sur E s'écrit donc :
$d = a\alpha - b\alpha + c$.

Lemme 2 : Soit α et α' des dilatations ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Pour tous a, b, c les images de (a, b, α, c) et (a, b, α', c) par l'opération préaffine sont les mêmes.

ii) Pour tous a, b : $(a\alpha, b\alpha, b\alpha', a\alpha')$ est un parallélogramme.

iii) Il existe une translation σ telle que $\alpha' = \alpha\sigma$.

Preuve : i) implique ii) : $a\alpha' = a\alpha - b\alpha + b\alpha'$.

ii) implique iii) : a étant choisi, la translation qui applique $a\alpha$ sur $a\alpha'$, applique $b\alpha$ sur $b\alpha'$, quel que soit $b \in E$.

iii) implique i) : Si $\alpha' = \alpha\sigma$, avec $\sigma = t_{uv}$, alors
$a\alpha' - b\alpha' + c = a\alpha - u + v - b\alpha + u - v + c$.

Définition 2 : Les dilatations α et α' sont affinement équivalentes lorsqu'elles vérifient les propriétés i), ii) ou iii) de ce lemme 2.

On note Ω l'ensemble quotient de W par la relation $\mathcal{E}$ d'équivalence affine. Pour cette relation toutes les applications constantes sont équivalentes : leur classe est notée : ω ; toute translation est équivalente à 1.

Lemme 3 : Ω est canoniquement un demi-groupe de neutre 1 et de zéro ω dans lequel tout élément distinct de ω est simplifiable.

Preuve : Il faut montrer que si $\alpha' = \alpha\,\sigma$ et $\beta' = \beta\,\theta$ alors $(\alpha'\,\beta')\,\mathcal{E}\,(\alpha\,\beta)$; pour cela il suffit d'établir qu'il existe une translation ρ telle que : $\alpha\,\sigma\,\beta = \alpha\,\beta\,\rho$, ce qui résulte du lemme 1.

Soit $k \in E$ et Ω_k l'ensemble des homothéties de centre k.

Lemme 4 : La correspondance canonique entre Ω_k et Ω est bijective.

Preuve : Il est immédiat que deux homothéties de même centre, affinement équivalentes, sont égales. Maintenant si $\alpha \in \Omega$ alors $\alpha' = \alpha\,\sigma$ est dans Ω_k lorsque σ est la translation qui applique $k\,\alpha$ sur k.

Il résulte immédiatement que cette bijection est un isomorphisme de demi-groupes. D'autre part on voit que toute dilatation α s'écrit de manière unique sous la forme $\beta\,\sigma$ avec $\beta \in \Omega_k$ et $\sigma \in T$ (groupe des translations).

Lemme 5 : Ω_k est un anneau.

Preuve : Par le lemme 1, Ω_k opère sur le groupe $(E_k, \oplus)$:
$(a \oplus b)\,\alpha = a\,\alpha \oplus b\,\alpha$; ainsi Ω_k est une partie de l'anneau des endomorphismes de $(E_k, \oplus)$ et la composition des homothéties coïncide avec la restriction du produit dans cet anneau.
On sait que la somme $\dot{+}$ vérifie : $a(\alpha \dot{+} \beta) = a\,\alpha \oplus a\,\beta$ pour tout $a \in E$.
Montrons que Ω_k est stable par $\dot{-}$. Si $\alpha = \beta$, $\alpha \dot{-} \beta = \omega$ est une dilation.
Sinon soit a et b non alignés avec k :
$a(\alpha \dot{-} \beta) \ominus b(\alpha \dot{-} \beta) = a\,\alpha \ominus b\,\alpha \oplus b\,\beta \ominus a\,\beta$, ce qui montre que :
$a(\alpha \dot{-} \beta)\; b(\alpha \dot{-} \beta) \;//\; ab$.

Transportons sur Ω cette structure d'anneau de Ω_k par la bijection canonique et montrons qu'elle est indépendante de k.
Il reste à établir que si h et k sont dans E, α et β dans Ω_k, $\alpha' = \alpha \mathscr{C}_{uv}$ et $\beta' = \beta \mathscr{C}_{xy}$ dans Ω_h, alors $(\alpha' \dot{+} \beta') \varepsilon (\alpha \dot{+} \beta)$; ceci résulte des égalités :
$a(\alpha \dot{+} \beta) = a\alpha - k + a\beta$; $a(\alpha' \dot{+} \beta') = a\alpha - u + v - h + a\beta - x \dot{+} y$.

Nous avons donc démontré que, de manière intrinsèque :

Théorème 1 : Ω est un anneau associatif unitaire et sans diviseurs de zéro.

Corollaire : Si E est une incidence translative finie, Ω est un corps fini (donc de caractéristique première et commutatif).

La définition de Ω comme quotient de W par la relation d'équivalence affine permet de définir canoniquement à partir de l'opération préaffine une application de $E^2 \times \Omega \times E$ dans E : on la note (a, b, ε, c) et on l'appelle l'opération affine pour E.

Théorème 2 : L'incidence translative E, munie de l'opération affine est un strict Ω-espace affine sans torsion (III. 8).

Preuve : Il est immédiat que les axiomes A_1' et A_2 de III. 1, sont vérifiés ; l'axiome A_3 résulte du Lemme 1.
D'autre part, en considérant le représentant de ε dans Ω_k, on voit que : $(a, k, \varepsilon, k) = k$ implique $a = k$ ou $\varepsilon = \omega$.

Il résulte de la preuve du lemme 5 et de VIII. 4, Lemme 1, que :

Proposition 1 : Soit E une incidence translative et $k \in E$: E pointé en k est un module sans torsion sur l'anneau des homothéties de centre k.

D'autre part, au strict Ω-espace affine E du théorème 2 est associé le Ω-module E_k de III. 3 avec : $a \oplus b = a - k + b$ et $a * \varepsilon = a\alpha - k\alpha + k$, où α est un représentant de $\varepsilon \in \Omega$; en particulier lorsque $\alpha \in \Omega_k$, $a * \varepsilon = a\alpha$: c'est la raison pour laquelle il nous arrivera de confondre le Ω-module E_k avec le module de la proposition 1.

Par VIII. 8, Proposition 1, les notions de translation algébrique ou géométrique sur E sont identiques. D'un autre côté, les homothéties de centre k sont aussi bien algébriques que géométriques. Enfin on sait qu'une dilatation algébrique (resp. géométrique) est uniquement composée d'un homothétie de centre k par une translation. Par conséquent :

Proposition 2 : Pour une incidence translative considérée aussi comme strict Ω-espace affine (théorème 2), on peut identifier les notions de dilatation algébrique et de dilatation géométrique.

Rappelons (III. 4, Proposition 2) que le groupe T des translations de E est un Ω-module isomorphe à E_k : l'image $\mathscr{C}_{ka} * \alpha$ est $\mathscr{C}_{ka'}$ avec $a' = a\alpha$. On remarquera que l'opération affine dans E peut encore s'écrire $(a, b, \alpha, c) = c\,(\mathscr{C}_{ba} * \alpha)$.

Nous allons maintenant nous situer parmi les travaux antérieurs dans ce domaine. Dans [4], E. Artin considère une structure qui, avec nos définitions, est une incidence V pour laquelle le parallélisme est défini de la façon suivante : $D \,//\, D'$ si $D = D'$ ou $D \cap D' = \emptyset$.
Sa méthode, reprise par la plupart des auteurs qui ont voulu généraliser ses résultats, consiste dans un premier temps à préciser la structure canonique sur l'ensemble des dilatations et en particulier sur l'ensemble T des translations... Considérant ensuite le cas d'une incidence translative, il présente le corps k des homomorphismes de T conservant les traces. Le retour à V, pour le munir d'une structure de k-espace vectoriel de dimension 2, se fait par "l'introduction de coordonnées" après avoir ajouté un nouvel axiome (voir VIII. 14). A la suite d'Artin, C.J. Everett [5] pour la dimension 2, puis R. Permutti [10] pour la dimension $n > 1$ (voir VIII. 17), ont appliqué cette méthode à une incidence translative vérifiant d'autres axiomes ; elle aboutit à l'introduction de coordonnées en passant cette fois-ci par un anneau.
Dans [2] , J. André, étudiant parmi d'autres structures, une incidence translative a établi que l'ensemble K des homomorphismes de T conservant les traces est un anneau sans diviseur de zéro et que T est un K-module (en fait la présentation est un peu différente : elle utilise la propriété indiquée au début de VIII. 12).
La méthode que nous avons employée dans ce paragraphe est originale : elle a été inspirée par la nouvelle définition des espaces affines exposée au Chapitre III.

Par contre, pour démontrer que E est un strict groupe ternaire (VIII. 8), nous sommes passés par le groupe T des translations ; comme le recours aux translations semble être la clef de voûte de tous les travaux sur ce sujet, il est intéressant d'établir la :

Preuve directe de VIII. 8, Théorème :
Se plaçant dans le contexte du paragraphe VIII. 6, on considère une incidence E à vrais parallélogrammes et faiblement arguésienne munie de la loi ternaire : (a, b, c) → abc, qui au triple (a, b, c) associe le quatrième sommet du parallélogramme construit sur (a, b, c). Par le théorème 1 de II. 9, il faut montrer que cette loi ternaire vérifie (notations de ce théorème) : J_1, J_2'', J_5 ; J_1 et J_5 sont immédiats ; montrons J_2'' : on pose abc = r , cde = s , rde = t et on applique VIII. 6, Proposition 4 : (s, c, d, e) et (d, e, t, r) étant des parallélogrammes, (s, c, r, t) est un parallélogramme ; (a, b, c, r) et (c, r, t, s) étant des parallélogrammes, (a, b, s, t) est un parallélogramme donc abs = t soit ab(cde) = (abc)de c'est-à-dire J_2'' .
Cette preuve étant établie, les propriétés des translations de E sont connues (voir I. 11).

Nous avons donc montré que les notions de strict groupe ternaire (I. 11) et de strict Ω-espace affine (III. 1) permettent d'aborder la géométrie d'Artin avec des méthodes nouvelles.
Pour être complet dans ce contexte, il nous faut, compte tenu de I. 11, Théorème 2, étudier le rôle des symétries ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

VIII. 10

Définition 1 : Soit E une incidence : une symétrie de E est une dilatation involutive distincte de l'application identique 1.

Il en résulte que toute symétrie est bijective.

Lemme 1 : Soit E une incidence et α une dilatation ; les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) α est une symétrie.
ii) Pour tous points a, b non sur une même trace de α, (a, b, a α, b α) est un vrai parallélogramme (VIII. 6).

Preuve : i) implique ii) : La symétrie α applique aussi $a\alpha$ sur a et b sur $b\alpha$.

ii) implique i) : L'image de $a\alpha$ par la dilatation α est sur la droite $a\,a\alpha$ et sur la parallèle à $ba\alpha$ par $b\alpha$: c'est donc a. Ajoutons que si un point est sur toutes les traces, alors il est fixe.

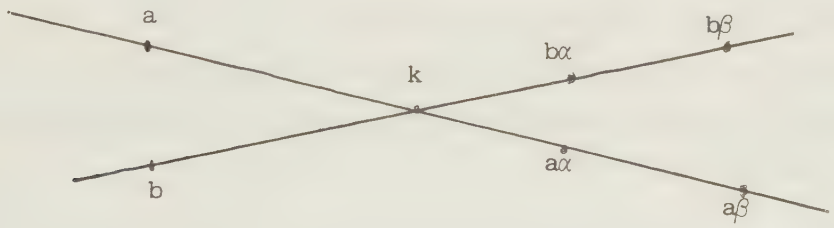
Lemme 2 : Toute symétrie d'une incidence est déterminée par une paire de points homologues distincts.

Preuve : Ceci résulte du caractère involutif d'une symétrie et de VIII. 3, Proposition.

Une symétrie de centre k est une homothétie involutive de centre k (distincte de 1). Nous ne savons pas s'il existe des incidences qui possèdent des symétries distinctes de même centre.

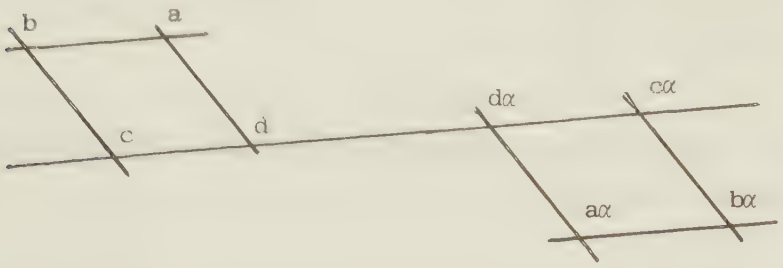
Proposition 1 : Pour une incidence faiblement arguésienne il y a unicité de la symétrie éventuelle qui échange deux points donnés.

Preuve : Soit α et β deux symétries distinctes avec le même centre k et a, b des points non alignés avec k : $(a, b, a\alpha, b\alpha)$ et $(a, b, a\beta, b\beta)$ sont de vrais parallèlogrammes et les droites parallèles ab, $a\alpha\ b\alpha$, $a\beta\ b\beta$, sont distinctes donc par le faible théorème de Désargues $a\alpha\ a\beta \,//\, b\alpha\ b\beta$, ce qui est absurde puisque ces droites sont des traces passant par k.

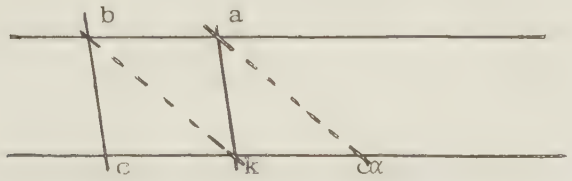


Lemme 3 : Soit E une incidence faiblement arguésienne, α une symétrie et (a, b, c, d) un vrai parallélogramme de E pour lequel ab n'est pas une trace de α et cd est une trace de α :
Alors $(a, b, d\alpha, c\alpha)$ est un vrai parallélogramme.

Preuve : Les droites ab, cd, a α b α, sont nécessairement distinctes ce qui permet d'appliquer le faible théorème de Désargues sachant que (a, b, a α, b α) et (a α, b α, c α, d α) sont des vrais parallélogrammes.



En particulier, soit α une symétrie de centre k, c $\in$ E et (a, b, c, k) un vrai parallélogramme:
Comme l'ensemble des traces de α est le faisceau sécant de sommet k, ab n'est pas une trace de α et ck est une trace de α. Ainsi c α est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur (a, b, k).



E étant faiblement arguésienne, on peut dire (VIII. 6) que (k, c, k, c α) est un parallélogramme ; de même, pour le lemme 3, (c, d, c α, d α) est un parallélogramme.

Proposition 2 : Soit E une incidence arguésienne.

i) Le produit de deux symétries est une translation.

ii) Un produit translation-symétrie ou symétrie-translation est une symétrie ou bien 1.

Preuve : Soit α et β des dilatations : pour chaque a $\in$ E on note a' = a α et a'' = a' β.

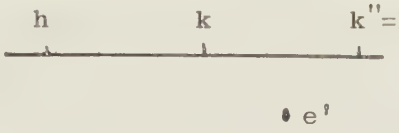
i) α et β sont des symétries distinctes :

Soit b $\in$ E pour lequel b, b', b'' sont distincts ; nous affirmons que pour tout c pour lequel b' c' n'est une trace si de α ni de β : b b'' // c c'' ; en effet lorsque les droites bc et b'' c'' sont distinctes ceci résulte du faible théorème de Désargues puisque (b, c, b', c') et (b', c', b'', c'') sont de vrais parallélogrammes.

Ce même raisonnement s'applique à un point d de b b' ou de b b'' en remplaçant b par un des points c précédents pourvu que d ne soit pas un centre pour α ou β .

Soit maintenant k centre pour α : ainsi $k' = k$ et $k'' \neq k$ (car $\alpha \neq \beta$).

Posons $h = k''\alpha$: comme $k'' = h'$ n'est un centre ni pour α ni pour β, il suffit de considérer un point $e' \notin h\,h'$ pour pouvoir appliquer les résultats précédents ; ainsi $e\,e'' \,//\, h\,h''$ donc $e\,e'' \,//\, k\,k''$.



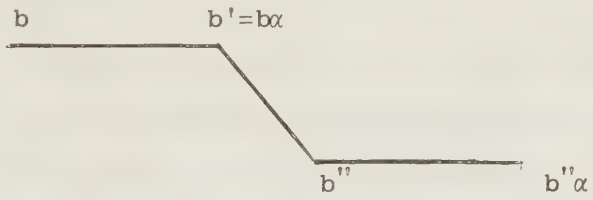
La démonstration est analogue avec un centre pour β.

Ainsi les traces de la dilatation $\alpha\beta$ constituent un faisceau parallèle.

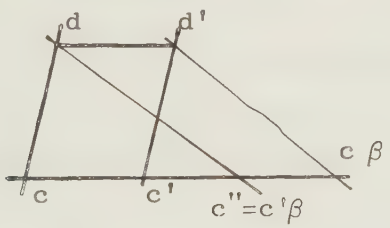
ii) α est une translation distincte de 1 et β une symétrie :

Pour tout $b \in E$ pour lequel b b' n'est pas une trace de β,

$(b,\ b\alpha,\ b\alpha\beta\alpha,\ b\alpha\beta)$ est un vrai parallélogramme donc : $b = b\alpha\beta\alpha\beta$.



Considérons maintenant c pour lequel c c' est une trace de β avec $d \notin c\,c'$ et pour lequel d d' n'est pas une trace de β :



Par le lemme 3, $(d,\ d',\ c\beta,\ c'')$ est un vrai parallélogramme donc $c\beta = c''\alpha$ ou $c = c\alpha\beta\alpha\beta$.

Ce raisonnement montre que si β n'est pas une translation avec les mêmes traces que α, la dilatation $\alpha\beta$ est involutive.

Pour terminer cette démonstration il reste à envisager le cas où la symétrie β est aussi une translation avec les mêmes traces que α :

si $\alpha = \beta$ alors $\alpha\beta = 1$;

si $\alpha \neq \beta$: pour tous a, b non sur une même trace, les droites ab, a'b' et

a'' b'' sont distinctes et (a, b, b', a') et (a', b', a'', b'') sont de vrais parallélogrammes donc (a, b, a'', b'') est un vrai parallélogramme ce qui prouve (Lemme 1) que $\alpha\,\beta$ est une symétrie.
Le raisonnement est analogue pour un produit symétrie-translation (on peut aussi passer par son inverse...).

Notation : Soit E une incidence : on note S l'ensemble de ses symétries et T l'ensemble de ses translations.

Proposition 3 : Pour une incidence faiblement arguésienne E :

ou bien $S \cap T = \emptyset$ ou bien $S \cup \{1\} = T$.

Preuve : Si S est vide, $S \cap T = \emptyset$.
Supposons qu'il existe une dilatation α qui soit à la fois symétrie et translation.
Soit θ une translation distincte de 1 et de α : α étant une symétrie, $\theta\,\alpha$ est une symétrie β donc $\theta = \beta\,\alpha$ est une symétrie puisque α est une translation.
Soit ε une symétrie distincte de α : α étant une translation, $\varepsilon\,\alpha = \psi$ est une symétrie donc $\varepsilon = \psi\,\alpha$ est une translation puisque α est une symétrie.

Théorème 1 : Soit E une incidence faiblement arguésienne pour laquelle $S \neq \emptyset$ et $S \cap T = \emptyset$:

i) L'ensemble S des symétries est canoniquement un strict groupe ternaire.

ii) L'ensemble T des translations est canoniquement un groupe binaire commutatif.

iii) Le groupe binaire obtenu en pointant S est isomorphe à T ou encore le strict groupe ternaire T pour la loi : $(\alpha, \beta, \gamma) \to \alpha\,\beta^{-1}\,\gamma$, est isomorphe à S.

Preuve : i) Par la proposition 2, la dilatation composée de 3 symétries est une symétrie.
Le caractère involutif des symétries entraîne d'autre part :
1) $\alpha\,\alpha\,\beta = \beta\,\alpha\,\alpha = \beta$ pour toute dilatation (et en particulier symétrie) β.
2) $\alpha\,\beta\,\gamma\,\gamma\,\beta\,\alpha = 1$ pour toutes symétries α, β, γ, c'est-à-dire $\alpha\,\beta\,\gamma = \gamma\,\beta\,\alpha$.
ii) et iii) Par hypothèse il existe $\sigma \in S$;

.../...

Pour toute translation θ, $\theta \sigma = \alpha$ est une symétrie et $\theta = \alpha \sigma$: on définit ainsi une bijection entre S et T.
S pointé en σ est un groupe binaire commutatif pour la loi : $\alpha \oplus \beta = \alpha \sigma \beta$.
Par transport de structure T est un groupe binaire commutatif isomorphe pour la loi : $(\theta, \psi) \to \alpha \sigma \beta \sigma$ (avec $\beta = \psi \sigma$) c'est-à-dire la loi de composition canonique $\theta \psi$.

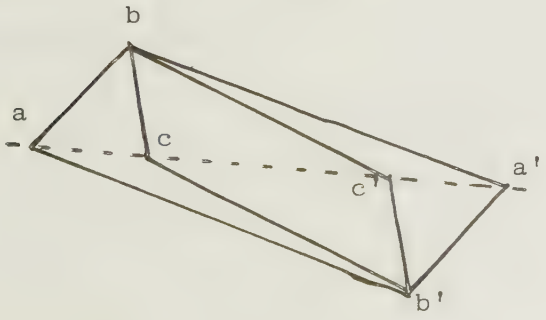
Théorème 2 : Soit E une incidence faiblement arguésienne pour laquelle
$S \cup \{1\} = T$.
L'ensemble T des translations est un groupe binaire commutatif.

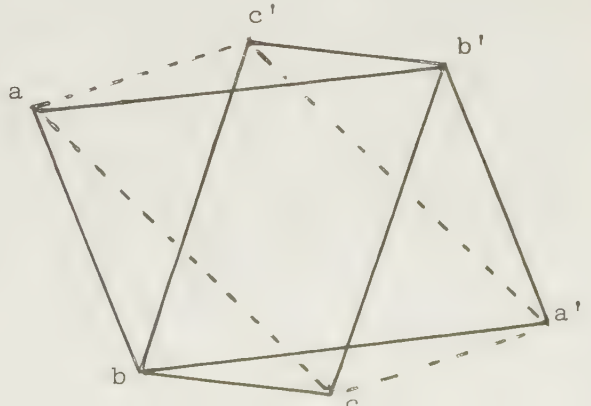
Preuve : Par la Proposition 2, T est un groupe binaire. D'autre part $\alpha \beta \beta \alpha = 1$ implique $\alpha \beta = \beta \alpha$.

Il résulte des théorèmes 1 et 2 que pour une incidence faiblement arguésienne qui possède une symétrie, l'ensemble T des translations est canoniquement un groupe binaire commutatif.
Rappelons (VIII. 6, Théorème) que pour une incidence faiblement arguésienne on peut seulement affirmer que T est une demi-groupe unitaire, commutatif, simplifiable, et encore s'il existe des translations de traces différentes ; ceci montre la puissance de cette simple hypothèse : il existe une symétrie.

Soit E une incidence : à la composition des translations de E est associée une notion de composition des parallélogrammes qui ont un coté commun, notion mise en évidence dans certains cas particuliers par le faible théorème de Désargues. Dans le contexte des symétries, on doit faire appel à une autre propriété de composition des parallélogrammes ; nous l'explicitons par l'axiome suivant :

Axiome C P : Si (a, b, a', b') et (b, c, b', c') sont de vrais parallélogrammes, alors (c, a, c', a') est aligné ou bien un vrai parallélogramme.





Lemme 4 : Soit E une incidence qui vérifie C P : avec les notations de cet axiome, si $c \in a\,a'$ alors $c' \in a\,a'$.

Preuve : Si c, a, c', a' ne sont pas alignés, (c, a, c', a') est un vrai parallélogramme ce qui est absurde puisque $c \in a\,a'$.

Considérons une incidence E qui vérifie C P et supposons qu'il existe $b \in E$ pour lequel (a, b, a', b') est un vrai parallélogramme et $d \in a\,a'$ pour lequel (b, d, b', d') est un vrai parallélogramme : on peut définir une correspondance biunivoque sur une partie de la droite $a\,a'$: celle qui associe d et d' pour b fixé.

Lemme 5 : Cette correspondance est indépendante du point b.

Preuve : Soit c non sur $b\,b'$ pour lequel (a, c, a', c') est un vrai parallélogramme : par C P , (c, b, c', b') est un vrai parallélogramme donc (c, d, c', d') est un vrai parallélogramme ; pour un point e de $b\,b'$, on remplace b par un des points c précédents.

Les commentaires précédents permettent de définir pour une incidence E qui vérifié C P une notion de parallélogramme aligné à sommets distincts : d' est le quatrième sommet associé à (a, d, a') dans ce contexte.

Soit maintenant E une incidence qui vérifie les axiomes 4' (vrais parallélogrammes) et C P : reprenant la construction antérieure, on constate que pour tout point $d \in b\,b'$, il existe d' et que d' est distinct de d. Deux cas sont à envisager :

i) $b\,b'$ ne rencontre pas $a\,a'$: pour tout point d de $a\,a'$ il existe un quatrième sommet d'associé à (a, d, a').

ii) $b\,b'$ rencontre $a\,a'$ en k (on dit que pour le vrai parallélogramme (a, b, a', b') les diagonales sont sécantes) : pour tout d de $a\,a'$, distinct de k il existe un quatrième sommet d'associé à (a, d, a'). Bien entendu on peut étendre la correspondance précédente en associant k à k mais on ne peut pas dire que (a, k, a', k) est un parallélogramme tant que l'on n'a pas prouvé que (a, k, a'', k) parallélogramme (dans le même sens) implique $a' = a''$. Cependant nous avons montré que :

Lemme 6 : Si E vérifie les axiomes 4' et C P, pour tous a, a', distincts, il existe une symétrie qui échange a et a'.

Axiome S Y : Pour tous points a, b, distincts il existe une symétrie qui échange a et b.

On note $\mathcal{S}_{ab}$ la symétrie (Lemme 2) qui échange a et b distincts.

Définition 2 : Une incidence symétrique est une incidence qui vérifie l'axiome S Y.

Théorème 3 : Une incidence E est symétrique si et seulement si elle vérifie les axiomes 4' et C P.

Preuve : Si E est symétrique elle vérifie 4' car (b) $\mathcal{S}_{ac}$ est le quatrième sommet du vrai parallélogramme construit sur (a, b, c) ; elle vérifie C P car $\mathcal{S}_{aa'} = \mathcal{S}_{bb'} = \mathcal{S}_{cc'}$.
Si E vérifie 4' et C P elle est symétrique (Lemme 6).

Proposition 4 : Pour une incidence symétrique les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le produit de deux symétries est une translation.

ii) Le produit de trois symétries est une symétrie ou bien 1.

iii) E est faiblement arguésienne.

Preuve : Nous avons vu, proposition 2, que iii) implique i) et ii). Utilisons maintenant les notations de l'axiome 4" (VIII. 6) pour montrer que :

i) implique iii) : $\mathcal{C}_{a_1a_3} = \mathcal{S}_{a_1a_2'}\ \mathcal{S}_{a_2'a_3}$, applique a_1' sur a_3'.

ii) implique iii) : $\mathcal{S}_{a_1a_3'} = \mathcal{S}_{a_1a_2'}\ \mathcal{S}_{a_2'a_2}\ \mathcal{S}_{a_2a_3'}$, applique a_1' sur a_3.

Proposition 5 : Pour une incidence E les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Faiblement arguésienne et symétrique.

ii) Translative.

Preuve : i) implique ii) : Théorème 3.

.../...

ii) implique i) : par VIII. 7, Théorème 1, E est faiblement arguésienne ; pour montrer qu'elle est symétrique on construit $\mathcal{S}_{aa'}$ en associant à chaque b le quatrième sommet du parallélogramme défini par (a, b, a') (VIII. 6). On remarquera que dans ce cas a et a' peuvent même être confondus : ceci est dû à l'hypothèse faiblement arguésienne.

Nous allons maintenant retrouver le théorème de VIII. 8 en utilisant les symétries.

Soit donc E une incidence translative ; deux cas sont à considérer :

*) Le cas du théorème 2 où $S \cup \{1\} = T$: nous dirons que E est commutative.

*) Le cas du théorème 1 où $S \cap T = \emptyset$: nous dirons que E n'est pas commutative.

Lemme 7 : Soit E une incidence translative :

i) Si E est commutative, elle ne possède pas de symétrie à centre.

ii) Si E n'est pas commutative, pour chaque $k \in E$ il existe une (unique) symétrie de centre k.

Preuve : i) 1 est la seule translation qui possède un point fixe.

ii) Dans ce cas le produit de trois symétries est une symétrie ; il suffit donc de composer $\mathcal{S}_{ka}$, $\mathcal{S}_{ab}$ et $\mathcal{S}_{bk}$ pour a, b, k distincts.

Soit E une incidence translative non commutative et $k \in E$: l'application $\mathcal{S}_{ka} \in S \rightarrow a \in E$, est une bijection ; par transport de structure E est un strict groupe ternaire isomorphe à S. Soit α, β, γ des symétries respectivement associées à a, b, c : comme $\beta\gamma$ est une translation et applique b sur c, $\beta\gamma = \mathcal{C}_{bc}$ donc $(k)\,\alpha\beta\gamma = (k)\,\alpha\mathcal{C}_{bc}$; par suite l'image de (a, b, c) par la loi ternaire sur E est : $(a)\,\mathcal{C}_{bc}$.

Soit E une incidence translative commutative et $k \in E$: $\mathcal{C}_{kk} = 1$ et $\mathcal{C}_{ka} \in S$ si $a \neq k$, alors l'application : $\mathcal{C}_{ka} \in T \rightarrow a \in E$, est une bijection ; par transport de structure E est un groupe ternaire commutatif isomorphe au groupe ternaire canonique sur T. L'image de (a, b, c) par cette loi ternaire est l'image de a par $\mathcal{C}_{kb}\mathcal{C}_{kc} = \mathcal{C}_{bk}\mathcal{C}_{kc} = \mathcal{C}_{bc}$.

Que E soit commutatif ou non, nous avons montré qu'il est canoniquement muni d'une loi ternaire pour laquelle l'image de (a, b, c) est le quatrième sommet du parallélogramme défini par (a, b, c).

Muni de cette loi, E est un strict groupe ternaire :

*) isomorphe à S dans le cas non commutatif (la loi ternaire n'est pas commutative),
*) isomorphe au strict groupe ternaire canonique sur T dans le cas commutatif (la loi ternaire est commutative).

VIII. 11

Soit E une incidence translative : en VIII. 9, théorème 1, nous lui avons associé l'anneau Ω qui est sans diviseurs de zéro. Nous allons donner ici une condition nécessaire et suffisante pour que l'entier $n > 0$ soit inversible dans Ω.

Au système géométrique des points $a_1, \ldots, a_n$, d'un strict Ω-espace affine F, considérés comme points pesants de poids 1 (VII. 4) nous avons associé la dilatation gravifique :

$$\mathcal{D} : x \to x' = x(1-n) + a_1 + \ldots + a_n$$

Lorsque $\mathcal{D}$ est distincte de 1 et que F est sans torsion, $\mathcal{D}$ possède au plus un centre (III. 10, Lemme 2) et c'est le centre géométrique du système.

Nous posons pour une incidence translative :

Axiome du centre géométrique à l'ordre n : Pour tous $a_1, \ldots, a_n$ il existe un centre géométrique.

Théorème : Soit E une incidence translative et n un entier positif : n est inversible dans Ω si et seulement si E vérifie l'axiome du centre géométrique à l'ordre n.

Preuve : Si n est inversible, l'équibarycentre des points a_i existe (VII. 4, Lemme 1) et c'est leur centre géométrique (VII. 4, Proposition 3).
Réciproquement, soit $k \in E$ et $y \in E$: si e est le centre géométrique du système y, k, ..., k (n éléments) alors $e * n = y$ dans E_k ; ainsi l'homothétie n est surjective donc inversible dans Ω_k (VIII. 3, Théorème).

Reprenons ces propriétés pour $n = 2$.
Le centre géométrique à l'ordre 2 pour $\{a, b\}$ est encore appelé le milieu de $\{a, b\}$. C'est le centre éventuel de la dilatation : $x' = a - x + b$, c'est-à-dire de la symétrie qui échange a et b.

Nous posons pour une incidence translative :

Axiome du milieu : Pour tous a, b il existe un milieu de $\{a, b\}$.

Théorème du milieu : Soit E une incidence translative :

2 est inversible dans Ω si et seulement si E vérifie l'axiome du milieu.

Terminons ce paragraphe par une remarque pour le cas général : E vérifie l'axiome du centre géométrique à l'ordre n pour tout entier positif n si et seulement si Ω contient le corps des rationnels mais Ω lui-même n'est pas nécessairement un corps. A l'inverse si Ω est un corps, il ne vérifie pas nécessairement l'axiome du centre géométrique à l'ordre n pour tout $n > 0$ puisqu'il peut être de caractéristique non nulle.

VIII. 12

Dans [2], J. André rappelle la notion de Gruppenpartition : G est un groupe commutatif et $\mathcal{R}$ est un ensemble de vrais sous-groupes de G tels que chaque élément de G distinct du neutre soit contenu dans un unique sous-groupe de $\mathcal{R}$, Dans [1] et [2] , il relie la notion d'incidence translative à celle de Gruppenpartition.
En fait, comme nous allons le montrer, c'est la structure de module qui intervient et c'est elle qui permet le développement ultérieur de la théorie.

Définition : Soit A un anneau unitaire et G un A-module :

Une famille $(N_i)_{i \in J}$ de sous-modules de G est une famille partitive si :

i) La réunion des N_i est G.

ii) L'intersection de deux N_i distincts est zéro.

Soit G une A-module : un sous-module est trivial si c'est zéro ou G. Ainsi pour une famille partitive de sous-modules non triviaux de G, chaque sous-module est de rang positif et la famille contient plus d'un élément.

On voit que :

Lemme 1 : Un module muni d'une famille partitive de sous-modules non triviaux n'est pas monogène.

Proposition 1 : Soit E une incidence translative (VIII. 7) et $k \in E$:

La famille des droites de E passant par k est une famille partitive de sous-modules non triviaux du Ω-module E_k (VIII. 9).

Preuve : Soit D une droite passant par k, a, b et soit α une dilatation fixe sur k : $a \oplus b$ et $a\alpha$ sont sur D donc D est un sous-module de E_k.
D'autre part une droite D passant par k est déterminée de manière unique par un point a distinct de k.
Enfin chaque droite est distincte de k et de E.

Corollaire : E_k (et donc aussi E) est de rang supérieur à 1.

Réciproquement :

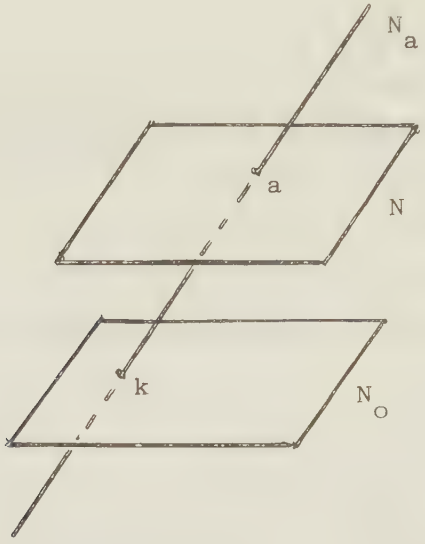
Théorème : Soit A un anneau unitaire :

Tout A-module G muni d'une famille partitive de sous-modules non triviaux est canoniquement une incidence translative.

Preuve : Nous définissons les droites de G à partir de la famille $(N_i)_{i \in J}$ à l'aide des translations algébriques sur G. Une droite D est une partie translatée d'un sous-module N_i. Nous disons que D et D' sont parallèles lorsqu'elles sont translatées d'un même N_i.
Axiome 1 : On se donne les points a et b : la translation $\mathcal{C}_{ak}$ qui applique a sur le zéro k de G, applique b sur c et il existe un unique N_i qui contient c donc une unique droite passant par a et b, image de N_i par $\mathcal{C}_{ka}$.
Axiome 2 : On se donne le point a et la droite D translatée de N_i ; il existe une unique parallèle D' à D passant par a : c'est l'image de N_i par la translation $\mathcal{C}_{ka}$.
Axiome 3 : Par hypothèse J a plus d'un élément.
Axiome 4 : La translation $\mathcal{C}_{ab}$ est une translation au sens de VIII. 5, Définition 1 ; elle applique a sur b.

Par le Lemme 1, la construction de ce théorème ne concerne pas les modules monogènes.

Exemple 1 : Soit A un corps de zéro ω et $G = A^3$; on note N_o le sous-espace des (x, y, ω), N un translaté de N_o, distinct de N_o et N_a le sous-module engendré par $a \in N$.



Alors pour $J = N \cup \{0\}$ la famille des N_i est une famille partitive de sous-modules de G.
Une droite au sens de la construction précédente est, avec le langage classique sur A^3 :

$$\begin{cases} \text{soit un plan parallèle à } N_o \\ \text{soit une droite non parallèle à } N_o \ . \end{cases}$$

Soit G un A-module de zéro k, muni d'une famille partitive de sous-modules non triviaux, auquel on associe l'incidence translative E du théorème.

Lemme 2 : Pour tout $\alpha \in A$, l'application : $x \in G \rightarrow \alpha \in G$ est une homothétie géométrique de centre k (VIII. 6).

Preuve : Par $a\,\alpha \ominus b\,\alpha = (a \ominus b)\,\alpha$, $a\,\alpha \ominus b\,\alpha$ et $a \ominus b$ sont dans un même sous-module N_i donc cette application conserve la direction.

Soit ϕ l'application de A dans Ω_k (VIII. 9) définie par ce Lemme 2. On voit que :

Lemme 3 : ϕ est un morphisme d'anneaux.

Si G est un A-module fidèle, alors A se plonge dans Ω .

Preuve : Par $x(\alpha \dotplus \beta) = x\alpha \oplus x\beta$ et $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$, ϕ est un morphisme d'anneaux. Il est injectif si : $x\alpha = x\beta$ pour tout $x \in G$ implique $\alpha = \beta$.

Ainsi lorsque G est fidèle, A est sans diviseurs de zéro et G est sans torsion. Comme sans torsion implique fidèle, on peut dire que :

Proposition 2 : A se plonge dans Ω si et seulement si G est un A-module sans torsion.

Bien entendu, si l'on ne considère que le groupe commutatif G on n'utilise que la structure de Z-module de G et cette structure est avec torsion lorsque la caractéristique n'est pas nulle.

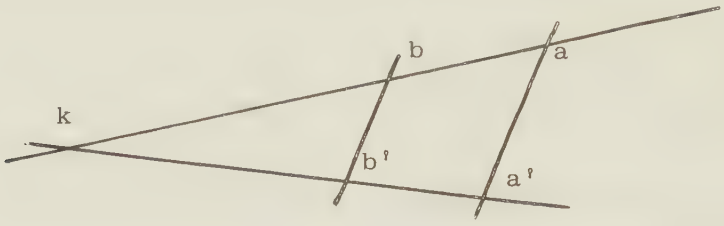
Reprenons le A-module G et soit B un anneau unitaire (sans diviseurs de zéro) : on dit que B est un anneau associé à $(G, (N_i))$ s'il existe sur G une structure G' de B-module pour laquelle G' est sans torsion et la famille (N_i) est une famille partitive de sous-modules de G'. Ainsi A est un anneau associé à (G, N_i) lorsque G est sans torsion. Pour deux anneaux B et C associés à (G, N_i) on dit que B est plus grand que C si C se plonge dans B et si la structure de C-module pour G est canoniquement induite par sa structure de B-module. On voit que :

Proposition 3 : Ω est le plus grand des anneaux associés à $(G, (N_i))$.

Exemple 2 : On reprend l'exemple 1.
Quel que soit $a \in N$ et pour tout couple (x, x') d'éléments de N_a avec $x \neq k$, il existe $\alpha \in A$ tel que $x' = x\alpha$. Il en est de même pour x, x', alignés au sens classique dans N_o.
Maintenant si k, x, x' sont dans N_o et non alignés, pour tout $y \notin N_o$, la parallèle à x y par x' ne rencontre pas k y. Ainsi ϕ est surjective et A est le plus grand des anneaux associés à $(G, (N_i))$.

VIII. 13

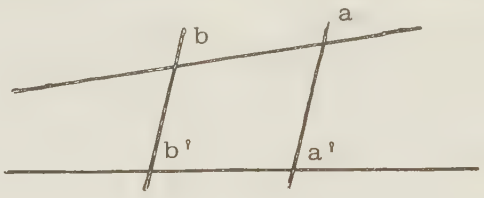
Soit E une incidence (VIII. 2, Définition) et a, a', b, b' des points de E distincts et non alignés : (a, a', b, b', k) est un vrai trapèze lorsque : a a' // b b', abk sont alignés et a'b'k sont alignés.



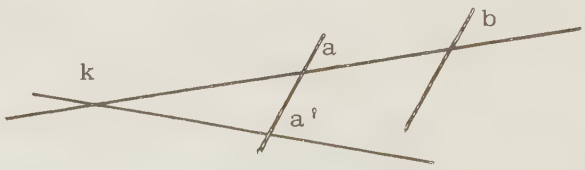
On dit que a, a', b, b', k sont les sommets, k la pointe et a a', b b', les bases.

La donnée de quatre sommets vérifiant les conditions nécessaires détermine au plus un trapèze. L'existence du cinquième sommet donne lieu à deux cas distincts selon qu'il s'agit de la pointe ou non.

Axiome T' : Pour tous a, a', b, b', distincts non alignés, avec a a' // b b' et ab non parallèle à a'b', il existe un point k commun à a'b' et ab.



Axiome T'' : Pour tous k, a, b, a' distincts et non alignés avec abk alignés, il existe un point b' commun à k a' et à la parallèle à a a' par b.



Théorème 1 : Pour une incidence E vérifiant l'axiome T', toute dilatation qui n'est pas une translation est une homothétie.

Preuve : Soit α une dilatation qui n'est pas une translation, $a \in E$, $b = (a)\alpha \neq a$, $c \in ab$ et $d = (c)\alpha$: a, b, c, d sont distincts et non alignés, $ac \,//\, bd$ car α est une dilatation et ab n'est pas parallèle à cd car α n'est pas une translation, donc les traces ab et cd ont un point k commun. On termine par VIII. 4, Proposition 2.

Lemme 1 : Pour une incidence E vérifiant l'axiome T'' toute homothétie de centre k distincte de ω (VIII. 9) est surjective.

Preuve : On se donne une homothétie α de centre k distincte de 1 et de ω et un point $y \neq k$; soit $a \notin k\,y$ et $b = (a)\alpha$: il existe x pour lequel (a, y, b, x, k) est un vrai trapèze, par conséquent $y = (x)\alpha$.

On appelle groupe avec zéro un demi-groupe avec zéro dans lequel tout élément non nul est inversible.

Théorème 2 : Soit E une incidence vérifiant l'axiome T'' :

Pour tout $k \in E$ l'ensemble des homothéties de centre k est canoniquement un groupe avec zéro.

Preuve : Lemme et VIII. 4, Proposition 1.

On rappelle qu'une incidence à vrais parallélogrammes vérifie l'axiome 4' (VIII. 6).

Proposition 1 : Pour une incidence E, deux des trois axiomes suivants : 4', T', T'' impliquent le troisième.

Preuve : 4' et T' impliquent T'' : On se donne k, a, b, a' distincts non alignés, avec abk alignés ; il existe e quatrième sommet du parallélogramme (b, a, a', e) ; on applique ensuite T' au quadruple (k, a, a', e) qui remplit les conditions nécessaires.

4' et T'' impliquent T' : On se donne a, a', b, b' distincts non alignés, avec $aa' \,//\, bb'$ et ab non parallèle à a'b' ; il existe e quatrième sommet du parallélogramme (b, a, a', e) ; on applique ensuite T'' au quadruplet (b', e, b, a') qui remplit les conditions nécessaires.

T' et T'' impliquent 4' : Soient a, b, c non alignés, D la parallèle à bc par a et e un point de D autre que a : si (a, b, c, e) n'est pas un parallélogramme, ab et ce ont un point k commun (par T'). Enfin, par T'', la parallèle à ka en c rencontre ae.

Considérons, pour une incidence, l'axiome suivant :

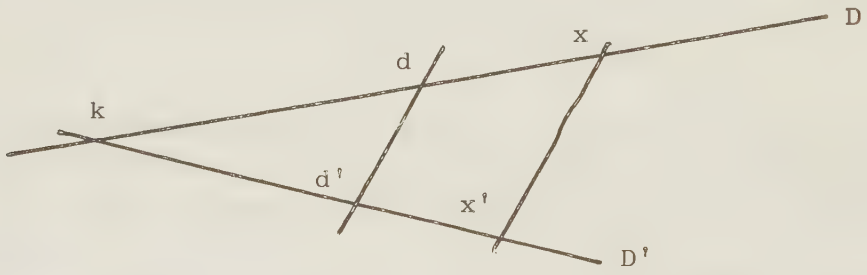
Axiome $\Delta 2$: Toute droite possède (seulement) 2 points.

Toute incidence qui vérifie l'axiome $\Delta 2$ vérifie trivialement T'' ; alors 4' et T' sont équivalents.

Proposition 2 : Toute incidence E qui vérifie l'axiome $\Delta 2$ et l'un des axiomes équivalents 4' ou T' est une géométrie classique à partir du corps $Z/2$.

Preuve : 4'' est trivialement vérifié donc E est une incidence translative ; $\Omega = Z/2$ et les droites sont les droites classiques.

Soit E une incidence, $k \in E$, D et D' des droites passant par k et $d \in D$, $d' \in D'$, distincts de k. On note Ψ la fonction de D dans D' qui à $x \in D$ associe éventuellement l'unique intersection x' avec D' de la parallèle à dd' par x.



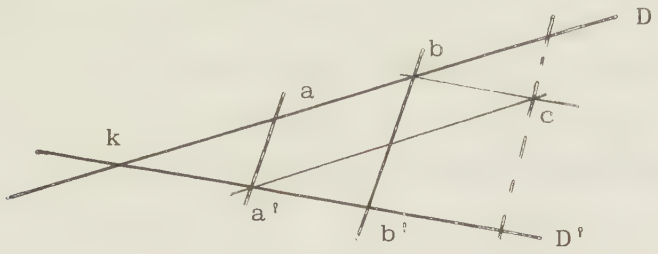
Il est immédiat que :

Lemme 2 : Si E vérifie T'', Ψ est une bijection.

Ainsi toutes les droites d'une incidence vérifiant T'' ont le même cardinal (pour deux parallèles on passe par l'intermédiaire d'une sécante commune).

Lemme 3 : Si E est une incidence translative la fonction Ψ est définie sur un sous-module D_1 de D et $(D_1)\Psi$ est un sous-module de D' isomorphe à D_1.

Preuve : D_1 contient k.
Soit $\alpha \in \Omega_k$: pour tout $a \in D_1$, $a\,\alpha \in D_1$ et $(a\,\alpha)' = a'\,\alpha$ $(x' = (x)\,\Psi)$.
Soit maintenant a, b des éléments de D_1 distincts de k et soit c le quatrième sommet du parallélogramme (b, k, a', c).



La parallèle à dd' par c rencontre D en $a \oplus b$ et D' en $a' \oplus b'$, d'où $(a \oplus b)' = a' \oplus b'$.
Enfin Ψ est clairement injective.

Proposition 3 : Soit E une incidence qui possède 3 points alignés.
L'axiome T'' implique les axiomes 4' et T'.

Preuve : Par la proposition 1, il suffit de montrer que T'' implique 4' et cette propriété, établie dans [7] par H. Lenz, se vérifie aisément sachant que toute droite de E possède au moins 3 points (Lemme 2).

VIII. 14

Soit E une incidence : on nomme fort théorème de Desargues la propriété analogue à celle de VIII. 6, Axiome 4'' lorsque les droites D_i ont un point k commun.
Soit E une incidence à vrais parallélogrammes : il résulte de VIII. 13, Proposition 1 que T'' et T' sont équivalents.
Soit E une incidence translative et $k \in E$: E_k est un Ω_k-module (Ω_k étant l'anneau des homothéties de centre k) et les droites de E passant par k sont des sous-modules de E_k (VIII. 12).
Ceci étant nous proposons les axiomes supplémentaires suivants et a priori indépendamment les uns des autres.

Pour une incidence :

Axiome Df : fort théorème de Desargues.

Axiome H (des homothéties) : Pour tous k, a, b dixtincts et alignés il existe une homothétie de centre k qui applique a sur b.

Axiome P (des parallèles) : Deux droites sans point commun sont parallèles.

Maintenant pour une incidence à vrais parallélogrammes :

Axiome T (des vrais trapèzes) : T' ou T'' .

Enfin pour une incidence translative :

Axiome I (d'isomorphisme) : Les droites passant par k sont des sous-modules de E_k tous isomorphes.

Il est immédiat que :

Lemme 1 : Pour toute incidence l'axiome P implique les axiomes 4', T' et T''.

Par une méthode analogue à celle de VIII. 7, Théorème 1, on démontre le :

Lemme 2 : Une incidence vérifie l'axiome H si et seulement si elle vérifie les axiomes T'' et Df.

Définition : Une incidence translative équilibrée est une incidence translative qui vérifie l'axiome I.

En particulier dans une incidence translative équilibrée toutes les droites ont le même cardinal. Cette dernière propriété est imposée a priori dans certaines constructions (voir par exemple les espaces affines généralisés au sens de E. Sperner [12]) ou encore résulte directement des axiomes (voir par exemple [9] de H. Lüneburg).

Exemple 1 : L'incidence translative Z^2 (VIII. 2, Exemple 2, i)) est équilibrée. On notera qu'elle vérifie aussi l'axiome Df.

Théorème 1 : Soit E une incidence translative qui vérifie l'axiome T :

i) E est équilibrée.

ii) Ω est un corps ; E_k est (donc) un espace vectoriel.

Preuve : i) VIII. 13, Lemmes 2 et 3.

ii) VIII. 13, Théorème 2.

Théorème 2 : Soit E une incidence translative qui vérifie l'axiome P :

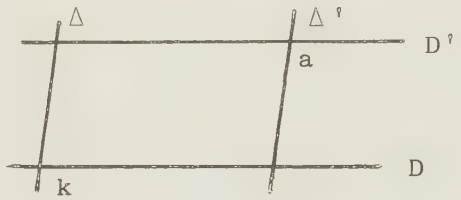
i) Ω est un corps ; E_k est (donc) un espace vectoriel.

ii) E est équilibrée.

iii) E_k est somme directe de deux droites distinctes quelconques passant par k (considérées comme sous-espaces vectoriels).

Preuve : i) et ii) : Lemme 1 et Théorème 1.

iii) Soit D et Δ deux droites passant par k : pour tout $a \in E$ la parallèle D' (resp. Δ') à D (resp. Δ) passant par a rencontre Δ (resp. D).



En dimension finie le théorème 2 signifie que la dimension de E_k est paire soit 2m et que celle des droites est m.

Exemple 2 : Soit $G = (Z/2)^4$ le $Z/2$-espace vectoriel de dimension 4 ensemble des $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ avec $\varepsilon_i = 0$ ou $\varepsilon_i = 1$, muni de la famille partitive des 5 sous-espaces vectoriels suivants : (0, 0, 0, 0) et :

(1,1,0,0)	(0,0,1,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1,0)	(1,1,0,1)
(1,0,0,0)	(0,0,0,1)	(0,1,0,1)	(0,1,1,1)	(1,0,1,1)
(0,1,0,0)	(0,0,1,0)	(1,0,1,0)	(1,0,0,1)	(0,1,1,0)

L'indicence translative associée vérifie les axiomes P, T et I ; on voit qu'elle ne vérifie pas l'axiome H ; le théorème suivant montre qu'elle ne vérifie pas l'axiome Df.

Théorème 3 : Soit E une incidence translative. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

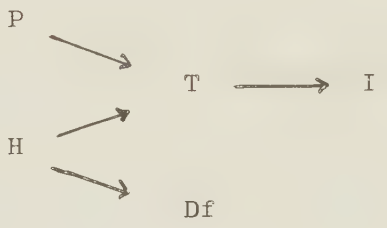
i) E vérifie l'axiome H.

ii) E vérifie les axiomes T et Df.

iii) E est une géométrie classique à partir d'un corps.

Preuve : Par le Lemme 2, i) et ii) sont équivalents.
Maintenant si T est vérifié, Ω est un corps (théorème 1) et si H est vérifié toute droite passant par k est un sous-espace vectoriel de E_k de dimension 1.

Précisons pour une incidence translative E, les relations entre les axiomes Df, H, P, T, I.
Symbolisant l'expression : "A implique B" par A → B, nous obtenons, compte tenu des propriétés que nous venons d'établir, le schéma suivant :



Avant de montrer que ces implications sont les seules possibles, nous allons situer dans ce contexte, 3 constructions connues.
La structure étudiée par E. Artin dans [4] est une incidence translative qui vérifie les axiomes P et Df : elle vérifie donc T et par conséquent H et I ; c'est une géométrie classique à partir d'un corps pour laquelle l'espace vectoriel E_k est de dimension 2.
La structure étudiée par J. André dans [1] est une incidence translative vérifiant P : elle vérifie donc T et I mais pas nécessairement H ou Df (ce qui nous ramènerait au cas précédent). Les propriétés de cette incidence sont indiquées au théorème 2.
Dans la construction de [7], H. Lenz utilise comme outil essentiel l'axiome T" ; soit (en simplifiant) E une incidence qui possède 3 points alignés et qui vérifie T" : par VIII. 13, Proposition 3, E est à vrais parallélogrammes. Si de plus E est faiblement arguésienne c'est alors une incidence translative vérifiant l'axiome T. Si elle est aussi fortement arguésienne, c'est (théorème 3) une géométrie classique à partir d'un corps. Notons qu'elle ne vérifie pas nécessairement l'axiome P.
Symbolisons maintenant l'expression : "A n'implique pas nécessairement B", par : A $\not\rightarrow$ B.
La deuxième construction nous montre que P $\not\rightarrow$ Df ; il en résulte que P $\not\rightarrow$ H, que I $\not\rightarrow$ Df et que T $\not\rightarrow$ Df. Cette dernière propriété montre que T $\not\rightarrow$ H.
Il est clair par le théorème 3 que H $\not\rightarrow$ P, T $\not\rightarrow$ P et Df $\not\rightarrow$ P. Le théorème

1 et l'exemple qui le précède montrent que $I \not\to T$; par conséquent $I \not\to P$ et $I \not\to H$.
Enfin on vérifie que l'incidence translative de VIII. 12, Exemple 1 est fortement arguésienne. Ainsi $Df \not\to I$ et par suite $Df \not\to H$, $Df \not\to T$.
Envisageant maintenant les couples d'axiomes précédents, nous considérons le seul cas vraiment nouveau : la conjonction de Df et I ; l'exemple 1 montre que ceci n'implique pas T, P ou H.

VIII. 15

Soit E une incidence translative : E est canoniquement un strict Ω-espace affine de rang supérieur à 1 et toute droite de E est un sous-espace affine de rang supérieur ou égal à 1.
Nous avons montré dans le paragraphe précédent que si E vérifie un des axiomes supplémentaires P, H ou T alors toutes les droites de E sont des sous-espaces isomorphes ; en particulier elles ont toutes le même rang.
Le cas du théorème 2 montre que ce rang peut être supérieur à 1.

Dans ce paragraphe, nous allons plus particulièrement considérer des incidences translatives pour lesquelles les droites sont (des sous-espaces) de rang 1.

Lemme 1 : Soit E une incidence translative.
Toute droite de rang 1 est un 1-sous-espace maximal.

Preuve : Soit D une droite de rang 1, $k \in D$ et M un sous-module monogène de E_k qui contient D : s'il existe un élément de M non sur D, il existe un générateur a de M non sur D ; alors la droite ka contient strictement D ce qui est absurde.

Soit E une incidence translative et D une droite de rang 1 ; il existe une paire $\{k, d\}$ qui engendre le sous-espace D : $\{k, d\}$ est une paire génératrice pour D ; dans le Ω-module E_k, D est l'ensemble des $d\varepsilon$ pour ε parcourant Ω : d est un générateur de D_k.
On sait que :

Lemme 2 : Si D est une droite de rang 1, quel que soit $h \in D$ il existe $e \in D$ pour lequel $\{h, e\}$ est une paire génératrice.

Soit $\{k, d\}$ une paire génératrice pour la droite D : comme E_k est un Ω-module sans torsion, la correspondance qui à $\alpha \in \Omega$ associe $a = d\,\alpha \in D$ est un isomorphisme donc :

Lemme 3 : Dans une incidence translative toute droite de rang 1 est un sous-espace affine isomorphe à Ω .

En particulier :
i) Il y a autant de générateurs de D_k que d'éléments inversibles dans Ω .
ii) Toute paire de points distincts de D est génératrice pour D si et seulement si Ω est un corps.

Nous allons maintenant nous placer dans un contexte plus général.

Définition 1 : Soit E une incidence, D une droite de E et k, d des points de D :
(k, d) est un couple générateur pour D si pour tout $a \in D$ il existe une homothétie de centre k qui applique d sur a.

On dit que d est un générateur de D pointée en k si (k, d) est un couple générateur pour D.
Pour une incidence translative, les notions de générateur de D_k ou de générateur de D pointée en k, sont identiques.

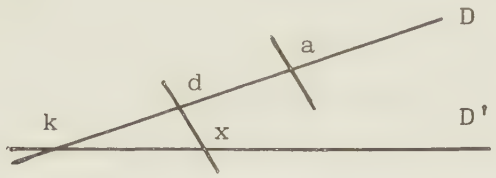
On note Ω_k le demi-groupe des homothéties de centre k pour l'incidence E (VIII. 4).

Proposition 1 : Soit E une incidence, D une droite de E et (k, d) un couple générateur pour D :
La correspondance entre $\alpha \in \Omega_k$ et $a \in D$ définie par $a = d\,\alpha$ est biunivoque.

Preuve : $\alpha \to d\,\alpha$, est une application de Ω_k dans D car, pour tout élément de Ω_k, D est une trace ; cette application est injective par VIII. 4, Lemme 1 et elle est surjective car (k, d) est un couple générateur pour D.

Corollaire : Dans ces conditions il existe autant de générateurs de D pointée en k que d'éléments inversibles dans Ω_k.

Proposition 2 : Soit E une incidence et D une droite de E munie du couple générateur (k, d).
Pour toute droite D' passant par k, distincte de D, et quels que soient $x \in D'$, $a \in D$, la parallèle à dx par a rencontre D'.



Preuve : Il existe $\alpha \in \Omega_k$ tel que $a = d\,\alpha$, donc la parallèle à dx par a passe par $x\,\alpha \in D'$.

Nous posons pour une incidence :

Axiome 5 : Toute droite possède un couple générateur.

Axiome 5' : Pour chaque droite D et chaque $k \in D$, il existe un générateur de D pointée en k.

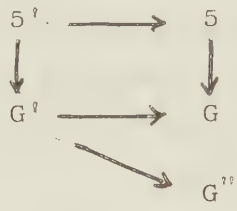
Axiome G : Sur chaque droite il existe un couple (k, d) tel que pour toute droite D' passant par k, distincte de D et quels que soient $x \in D'$, $a \in D$, la parallèle à dx par a rencontre D'.

Axiome G' : Sur chaque droite D et pour chaque $k \in D$, il existe $d \in D$ tel que pour toute droite D' passant par k, distincte de D, quels que soient $x \in D$, $a \in D$, la parallèle à dx par a rencontre D'.

Axiome G'' : Sur chaque droite D et pour chaque droite D', distincte de D, rencontrant D, il existe $d \in D$ tel que, quels que soient $x \in D'$, $a \in D$, la parallèle à dx par a soit sécante à D'.

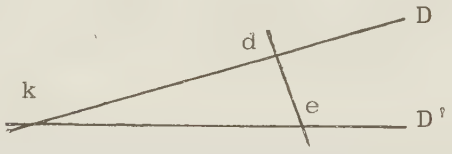
Comparant avec les axiomes étudiés au paragraphe précédent, on voit que 5 et 5' (resp. G, G' et G'') sont des formes affaiblies de H (resp. T). On sait que $H \to T$ et $T \not\to H$; cependant pour une incidence fortement arguésienne (qui vérifie Df mais pas nécessairement 4''), $T \to H$ (VIII. 14, Théorème 3).
Il est à prévoir que les relations entre les axiomes ci-dessus seront analogues. Tout d'abord il est immédiat que : $5' \to 5$, $G' \to G$ et $G' \to G''$.

Ensuite la proposition 2 montre que : $5' \rightarrow G'$ et $5 \rightarrow G$.
Ainsi pour une incidence nous obtenons le schéma suivant :



Proposition 3 : Pour une incidence qui vérifie l'un des axiomes 5, 5', G', G'' toutes les droites ont le même cardinal.

Preuve : Pour l'axiome 5, ceci résulte de la proposition 1.
Pour les autres il suffit de le démontrer sous G'' ; soit donc D et D' des droites distinctes sécantes en k, $d \in D$ associé au couple (D, D') et $e \in D'$ associé au couple (D', D) : la projection parallèlement à ed établit une bijection entre D et D'.



Pour deux parallèles, on passe par une sécante commune.

Proposition 4 : Pour une incidence fortement arguésienne E les axiomes 5 et G (resp. 5', G' et G'') sont équivalents.

Preuve : G implique 5 : Soit D une droite à laquelle est associée un couple (k, d) de l'axiome G et soit $a \in D$ distinct de k et de d ; nous allons construire une homothétie de centre k qui applique d sur a : A $x \in D$ on associe l'intersection x' de kx avec la parallèle à dx par a ; le fort théorème de Desargues montre alors que pour tous x, y non sur D, $xy \,//\, x'y'$. Maintenant soit D' une droite, distincte de D, passant par k, $e \in D'$ pour lequel (k, d) est un couple associé à D' par l'axiome G et e' l'image de e par la construction précédente : à $b \in D$ on associe b' intersection de D avec la parallèle à be par e' ; le fort théorème de Desargues montre que cette application $b \rightarrow b'$ ne dépend pas de la droite D'.

G' implique 5' : Démonstration analogue.

G'' implique G' : Soient D, D'', D' des droites distinctes sécantes en k, d ∈ D (resp. e ∈ D'') associé au couple (D, D'') (resp. (D'', D')) par l'axiome G' ; quels que soient a ∈ D et x ∈ D', la parallèle à ed par a rencontre D'' en y, la parallèle à ex par y rencontre D' en z et le fort théorème de Desargues montre que dx est parallèle à az.

Nous posons maintenant pour une incidence translative :

Axiome R 1 : Toute droite est (un sous-espace) de rang 1.

Théorème 1 : Pour une incidence translative :

i) Les axiomes 5, 5' et R 1 sont équivalents.

ii) Les axiomes G et G' sont équivalents.

iii) Les axiomes du ii) sont plus faibles que ceux du i).

Preuve : i) On sait que 5' → 5 ; on voit que 5 → R 1 ; enfin il résulte du lemme 2 que R 1 → 5'.

ii) On sait que G' → G ; l'implication réciproque résulte de l'axiome 4.

iii) L'incidence translative de VIII. 14, Exemple 2 vérifie l'axiome P donc aussi les axiomes G et G' mais ne vérifie pas l'axiome R 1.

Définition 2 : Une géométrie affine généralisée est une incidence translative qui vérifie l'axiome 5 (ou 5' ou R 1).

Exemple : Toute géométrie classique à partir d'un corps Γ est une géométrie affine généralisée car tout couple de points distincts (a, b) est un couple générateur pour la droite ab.

Il existe des géométries affines généralisées pour lesquelles l'anneau Ω n'est pas un corps (voir VIII. 18). Une géométrie affine généralisée ne vérifie donc pas nécessairement les axiomes P, T ou H ; nous ne savons pas si elle vérifie toujours Df (voir VIII. 16).

Il résulte de la proposition 4, la propriété suivante :

Soit E une incidence translative qui vérifie G, G' ou G'' : si E n'est pas une géométrie affine généralisée, E n'est pas fortement arguésienne.

Théorème 2 : Soit E une géométrie affine généralisée :

i) E est équilibrée.

ii) Les droites de E sont les 1-sous-espaces maximaux.

Preuve : i) Par le Lemme 3 toutes les droites sont des sous-espaces isomorphes.

ii) Lemme 1.

VIII. 16

Soit A un anneau associatif unitaire de zéro ω : A admet un corps des quotients à droite s'il peut être plongé dans un corps Γ tel que tout élément de Γ soit de la forme $\alpha \beta^{-1}$ avec $\alpha \in A$, $\beta \in A$. Dans cette hypothèse A est sans diviseur de zéro et, puisque $\gamma^{-1} \delta$ peut s'écrire $\alpha \beta^{-1}$, on voit que pour tous γ, δ distincts de ω, il existe α, β tels que $\gamma \alpha = \delta \beta \neq \omega$.
La réciproque est exacte (voir Bourbaki, Livre II, Chapitre 1, § 9, exercices 8 et 9).
Ceci étant un A-module sans torsion G peut être plongé par extension des scalaires dans un Γ-espace vectoriel L, ensemble des $a \alpha^{-1}$ avec $a \in G$, $\alpha \in A$ (voir Bourbaki, Livre II, Chapitre 2, § 7, exercice 32).

Proposition 1 : Soit E une géométrie affine généralisée.

Si Ω admet un corps des quotients à droite, E est une sous-incidence d'une géométrie classique à partir d'un corps.

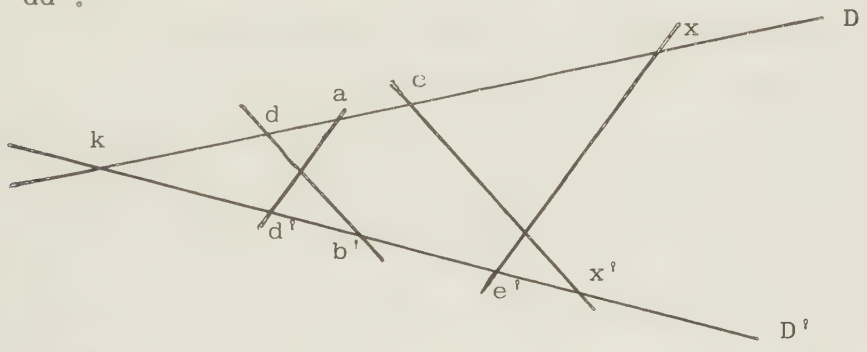
Preuve : Plongeons le Ω-module sans torsion E_k dans le Γ-espace vectoriel L (commentaires précédents).
Toute droite de E passant par k, ensemble des $d\varepsilon$ avec $d \in E$, $d \neq k$, et ε parcourant Ω, est contenue dans la droite kd de L.
Soit a et b dans E : ils déterminent une translation θ dans E et une translation Ψ dans L ; sur la forme algébrique il est immédiat que la restriction de Ψ à E est θ ; par conséquent E est une sous-incidence de L.

En particulier toute géométrie affine généralisée pour laquelle Ω admet un corps des quotients vérifie l'axiome Df.

Nous allons maintenant préciser un aspect géométrique de cette question.

Définition : Une incidence à générateurs est une incidence qui vérifie l'axiome 5' de VIII. 15.

Soit E une incidence à générateurs : nous appelons Théorème de Pappus très généralisé pour E, la propriété qui accompagne la situation suivante :
On considère deux droites distinctes D et D' sécantes en k, munies respectivement du générateur d ou d' associé à k.
Alors, pour tous $a \in D$, $b' \in D'$, distincts de k, il existe $c \in D$ et $e' \in D'$ tels que si x est l'intersection avec D de la parallèle à d'a par e' et x' l'intersection avec D' de la parallèle à db' par c, on ait $x \neq x'$ et $xx' \,//\, dd'$.

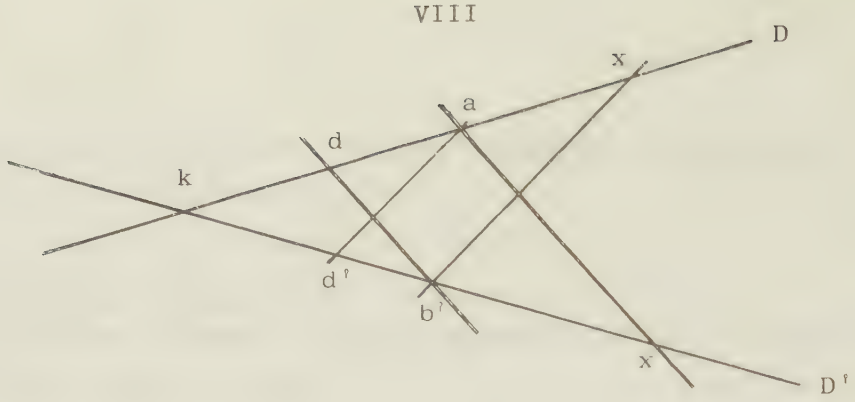


On voit que :

Proposition 2 : Pour une incidence à générateurs E les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) E vérifie le théorème de Pappus très généralisé.
ii) Pour chaque $k \in E$ et quels que soient α, β de Ω_k, distincts de ω, il existe γ et ε de Ω_k tels que $\alpha\,\varepsilon = \beta\,\gamma \neq \omega$.

Corollaire : Pour une géométrie affine généralisée E, Ω admet un corps des quotients à droite si et seulement si E vérifie le théorème de Pappus très généralisé.

Nous appelons : Théorème de Pappus généralisé, pour une incidence à générateurs, la forme particulière du théorème de Pappus très généralisé pour laquelle a lui-même est un point c et b' lui-même est un point e'.



On voit que :

Proposition 3 : Pour une incidence à générateurs E les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E vérifie le théorème de Pappus généralisé.

ii) Pour chaque $k \in E$, Ω_k est commutatif.

Corollaire : Pour une géométrie affine généralisée E, Ω admet un corps des quotients commutatif si et seulement si E vérifie le théorème de Pappus généralisé.

VIII. 17

Définition : Soit A un anneau unitaire et G un A-module.

G possède la propriété 1-maximale partitive si tout élément non nul est contenu dans un unique sous-module monogène maximal.

Proposition 1 : Si E est une géométrie affine généralisée (VIII. 15, Définition 2) alors le Ω-module E_k possède la propriété 1-maximale partitive.

Preuve : Pour tout point $a \neq k$ il existe une unique droite passant par a et k donc un unique sous-module monogène maximal de E_k contenant a (VIII. 15, Théorème 2).

On sait de plus que E_k n'est pas monogène.

Réciproquement, soit A un anneau unitaire et G un A-module, non monogène, qui possède la propriété 1-maximale partitive : la famille des sous-modules monogènes maximaux de G étant une famille partitive (VIII. 12, Définition), G

est canoniquement une incidence translative (VIII. 12, Théorème).

Lemme : Avec les hypothèses précédentes, le morphisme ϕ de VIII. 12, de A dans Ω, est surjectif.

Preuve : Soit D un sous-module monogène maximal de G, engendré par d : si une homothétie géométrique de centre k (le zéro de G) applique d sur d', il existe $\alpha \in A$ tel que $d' = d\,\alpha$ puisque $d' \in D$.

Par conséquent, l'incidence translative G que nous considérons, vérifie l'axiome 5 ; de plus, si le A-module G est sans torsion, A est isomorphe à Ω. Ainsi on peut énoncer la :

Proposition 2 : Tout A-module G, non monogène, qui possède la propriété 1-maximale partitive, est canoniquement une géométrie affine généralisée. Si G est sans torsion, A est isomorphe à Ω.

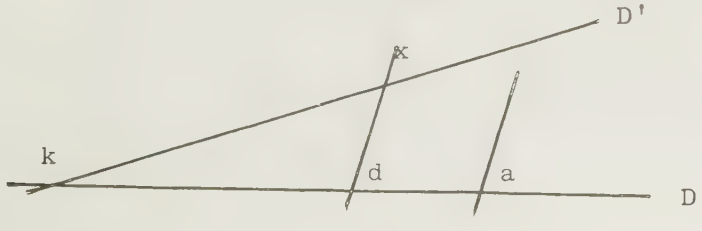
Théorème : La classe des géométries affines généralisées correspond biunivoquement à la classe des modules non monogènes, sans torsion, et qui possèdent la propriété 1-maximale partitive.

On sait que les espaces vectoriels vérifient les conditions de ce théorème ; nous verrons que ce ne sont pas les seuls.

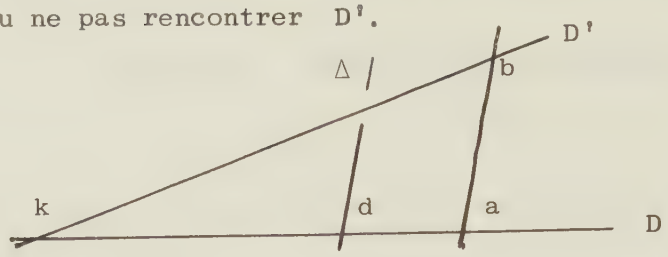
Dans le paragraphe suivant nous allons déterminer une autre caractérisation des modules associés aux géométries affines généralisées.

VIII. 18

Soit E une géométrie affine généralisée (VIII. 15, Définition 2), D et D' deux droites distinctes sécantes en k et d un générateur de D_k ; on sait (VIII. 15, Proposition 2) que pour tous $x \in D'$, $a \in D$, la parallèle à dx par a rencontre D'.



Considérons maintenant $a \in D$, $b \in D'$ et la parallèle Δ à ab par d : elle peut rencontrer ou ne pas rencontrer D'.



Lorsque Δ rencontre D' en b', l'homothétie α de centre k qui applique d sur a, applique b' sur b ; si d' est un générateur de D'_k et si : $b = d' \beta$, $b' = d' \beta'$, alors $\beta = \beta' \alpha$.
On établit aisément la réciproque.

Ceci nous amène à considérer la divisibilité à droite dans un anneau.
On note A un anneau de zéro ω, de neutre 1, associatif et sans diviseurs de zéro.
On dit que α divise β s'il existe β' tel que $\beta = \beta' \alpha$.
Cette relation de divisibilité est une relation de préordre (lorsque α divise β on peut encore dire que α est inférieur à β et le noter : $\alpha \leqslant \beta$).
Si α divise β et si β divise α alors $\beta = \beta' \alpha$ et $\alpha = \alpha' \beta$ donc $\beta = \beta' \alpha' \beta$ ce qui, pour $\beta \neq \omega$, impose $\beta' \alpha' = 1$; de même $\alpha' \beta' = 1$. Ainsi les classes d'équivalence canoniquement associées à cette relation de préordre sont de la forme $\varepsilon \alpha$ avec ε inversible dans A.
En particulier la classe de 1 est l'ensemble des éléments inversibles dans A (classe des plus petits éléments).
Il résulte de $\omega = \omega \alpha$ que tout $\alpha \in A$ divise ω et on voit que ω est le seul élément divisible par ω : ω est le (unique) plus grand élément .
Soit $\alpha \neq \omega$ et β tels que $\beta = \beta' \alpha$: le β' ainsi défini est unique ; c'est le quotient de β par $\alpha \neq \omega$.
Soit N une partie de A et M l'ensemble de ses minorants : un P.G.C.D. (plus grand commun diviseur) de N est un plus grand élément de M. Les P.G.C.D. de N sont les éléments $\varepsilon \alpha$ où ε est inversible et α un P.G.C.D. de N.
La partie N est première (ou les éléments de N sont premiers entre eux) lorsque 1 est un P.G.C.D. de N ; alors les P.G.C.D. de N sont les éléments de A inversibles et ce sont les seuls minorants de N.

On note G un A-module de zéro k, sans torsion.

Définition 1 : $\alpha \in A$ divise $b \in G$ s'il existe $a \in G$ pour lequel $b = a\alpha$.

Un P.G.D. (plus grand diviseur) de b est un plus grand élément de l'ensemble des diviseurs de b.

b est premier lorsque 1 est une P.G.D. de b.

Comme G est sans torsion, pour chaque diviseur $\alpha \neq \omega$, il existe un unique a tel que $b = a\alpha$: c'est le quotient de b par α.

Si α divise b et si β est inférieur à α (c'est-à-dire β divise α dans A) alors β divise b.

Les P.G.D. de b sont les éléments $\varepsilon\alpha$ où ε est inversible et α un P.G.D. de b.

b est premier si et seulement si ses seuls diviseurs sont les éléments inversibles dans A.

Lemme 1 : Le quotient a de b par $\alpha \neq \omega$ est premier si et seulement si α est un P.G.D. de b.

Preuve : Si a n'est pas premier : $a = c\gamma$ avec γ non inversible donc $b = c\gamma\alpha$: $\gamma\alpha$ divise b et α divise $\gamma\alpha$ donc α n'est pas un P.G.D. de b.

Si α n'est pas un P.G.D. de b : il existe un diviseur ε de b plus grand que α : $\varepsilon = \gamma\alpha$ avec γ non inversible ; alors $b = c\varepsilon = c\gamma\alpha$ donc $c\gamma = a$ et a n'est pas premier.

Ainsi les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) b possède un P.G.D. distinct de ω.

ii) b possède un quotient premier.

Dans ce cas b possède autant de quotients premiers qu'il y a d'éléments inversibles dans A.

Théorème 1 : Soit b un élément de G (distinct de k) ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) b possède un P.G.D. distinct de ω.

ii) Il existe un unique sous-module monogène maximal D qui contient b.

Dans ce cas les générateurs du sous-module D sont les quotients premiers de b.

Preuve : Soit δ un P.G.D. de b, d le quotient premier associé et D le sous-module engendré par d : si le sous-module engendré par $a \in G$ contient b, alors $b = a\alpha$ donc α divise b ; par suite α divise δ soit $\delta = \gamma\alpha$ d'où $b = d\delta = d\gamma\alpha = a\alpha$ ce qui implique $a = d\gamma$. Ainsi i) implique ii). ii) implique i) : Soit d un générateur de D : si d n'est pas premier, il existe a et α tels que $d = a\alpha$ avec α non inversible ce qui est absurde puisque D est maximal.

Définition 2 : G est un A-module à P.G.D. si tout élément de G possède un P.G.D.

Il résulte du théorème 1 le :

Théorème 2 : G possède la propriété 1-maximale partitive (VIII. 17, Définition) si et seulement si G est un A-module à P.G.D.

Corollaire : La classe des géométries affines généralisées correspond biunivoquement à la classe des modules non monogènes sans torsion et à P.G.D. sur un anneau associatif, unitaire et sans diviseur de zéro.

Ainsi la notion de géométrie affine généralisée est reliée à une propriété arithmétique à la fois simple et expressive.

VIII. 19

Soit E une incidence, p un entier supérieur à 1 : une famille de droites $D_1, \ldots, D_p$ constitue une chaîne dans E si pour tout $j < p$, D_j et D_{j+1} sont sécantes ; chaque D_j est un maillon de la chaîne ; la direction $\mathcal{D}_j$ définie par D_j est la direction du maillon D_j.
Dans la suite nous ne considérons que des chaînes pour lesquelles les directions des maillons sont distinctes.
Soit D une droite et $\mathcal{D}$ une famille de directions distinctes $\mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_p$: la chaîne $D_1, \ldots, D_p$ est dirigée par $(D, \mathcal{D})$ si $D_1 = D$ et pour tout j entre 2 et p : $D_j \in \mathcal{D}_j$.

Définition 1 : $(D, \mathcal{D})$ est un enchaînement (resp. —— direct) d'ordre p pour E si pour chaque choix du dernier maillon D_p il existe une (resp. —— unique) chaîne dirigée par $(D, \mathcal{D})$.

Dans une construction axiomatique où l'on suppose que E possède un enchaînement, on peut supprimer l'axiome 3 de VIII. 2 (il existe trois points non alignés).

Théorème 1 : L'incidence translative E possède un enchaînement (resp. —— direct) d'ordre p si et seulement si E_k est somme (resp. —— directe) de p droites passant par k (considérées comme sous-modules de E_k).

Preuve : Soit (D, $\mathcal{D}$) un enchaînement d'ordre p pour E, $k \in D$, $a \in E$, D_p la droite de $\mathcal{D}_p$ passant par a et $D_1, \ldots, D_p$, une chaîne dirigée par (D, $\mathcal{D}$) de premier maillon $D_1 = D$ et de dernier maillon D_p : on pose $a_j = D_j \cap D_{j+1}$, $a_o = k$ et $b_j = k \not\in a_{j-1}\, a_j$; b_j est sur la droite D'_j de $\mathcal{D}_j$ passant par k et $a = b_1 \oplus \ldots \oplus b_p$.
Réciproquement, si E_k est somme de p droites D'_j passant par k, on note $D = D'_1$, $\mathcal{D}_j$ la direction de D'_j et $\mathcal{D}$ la famille $\mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_p$; soit D_p une droite de $\mathcal{D}_p$ et $a \in D_p$: a s'écrit $b_1 \oplus \ldots \oplus b_p$ avec $b_j \in D'_j$; on considère $a_o = k$, $a_j = a_{j-1} \oplus b_j$, $D_1 = D$ et D_j la droite de $\mathcal{D}_j$ qui passe par a_j : la famille $D_1, \ldots, D_p$, ainsi défini est une chaîne dirigée par (D, $\mathcal{D}$), de premier maillon D et de dernier maillon D_p.
Enfin on voit que l'unicité est conservée d'un contexte à l'autre.

Corollaire : Toute incidence translative E de rang fini n possède un enchaînement d'ordre $p \leqslant n$.

Preuve : Soit $k, e_1, \ldots, e_n$ un système générateur minimal pour E ; ces points définissent p droites $k\, e_j$ avec $p \leqslant n$ et E_k est la somme de ces droites.

Exemple : Considérons, avec les notations utilisées, l'incidence translative de VIII. 12, Exemple 1 : elle est de rang 3.
En posant $D = N_o$ et $\mathcal{D}_2$ la direction de N_a pour a choisi dans N, on définit un enchaînement direct d'ordre 2.
En posant $D = N_a$ et $\mathcal{D}_2$ (resp. $\mathcal{D}_3$) la direction de N_b (resp. N_c) pour a, b, c choisis dans N et non alignés au sens classique, on définit un enchaînement direct d'ordre 3.

Soit E une incidence qui possède des enchaînements : parmi tous les enchaînements pour E, ceux dont l'ordre est le plus petit sont les enchaînements d'ordre minimal.

L'ordre minimal pour les enchaînements de E est toujours supérieur à 1 et si E est une incidence translative de rang n, il est inférieur ou égal à n (corollaire).

Proposition 1 : Pour une géométrie affine généralisée E les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) E est de rang n.

ii) E possède un enchaînement d'ordre minimal n.

Preuve : i) implique ii) : Par le corollaire, E possède un enchaînement d'ordre $p \leqslant n$ donc (théorème) E est somme de p droites passant par k ; en choisissant un générateur sur chacune de ces droites on construit un système générateur à p éléments pour E_k ce qui impose $p \geqslant n$.

ii) implique i) : Par le théorème, E est somme de n droites passant par k donc il est de rang $m \leqslant n$; on sait alors que E possède un enchaînement d'ordre m ce qui impose $m = n$.

Définition 2 : On dit qu'une géométrie affine généralisée E est de dimension n si le Ω-module E_k est isomorphe au Ω-module à droite Ω^n.

Lemme : Soit E une géométrie affine généralisée de dimension n et $e_1,\ldots,e_n$ une base de E_k.
Pour tout j de 1 à n, e_j est un générateur de la droite $k\,e_j$.

Preuve : Soit d un générateur de la droite $k\,e_j$ avec :
$d = e_1\,\delta_1 + \ldots + e_n\,\delta_n$; l'égalité $e_j = d\,\varepsilon$ implique $\delta_j\,\varepsilon = 1$ et pour tout $i \neq j$: $\delta_i\,\varepsilon = \omega$ c'est-à-dire $\delta_i = \omega$.

Théorème 2 : Une géométrie affine généralisée E est de dimension n si et seulement si elle possède un enchaînement direct d'ordre n.

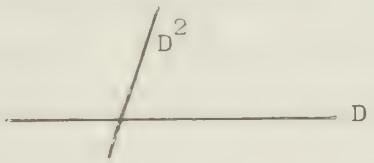
Preuve : Lemme et Théorème 1.

Corollaire : Pour une géométrie affine généralisée, tout enchaînement direct est d'ordre minimal.

L'exemple montre que cette propriété n'est pas vraie pour toute incidence translative.

Les notions précédentes donnent lieu à des propriétés particulières pour $p = 2$ ou $n = 2$.

Une chaîne à deux maillons est constituée par deux sécantes D_1, D_2. Si $(D, \mathcal{D})$ est un enchaînement d'ordre 2 pour E, $\mathcal{D}$ contient la seule direction $\mathcal{D}_2$, distincte de celle de D et toute droite D_2 de $\mathcal{D}_2$ rencontre D.

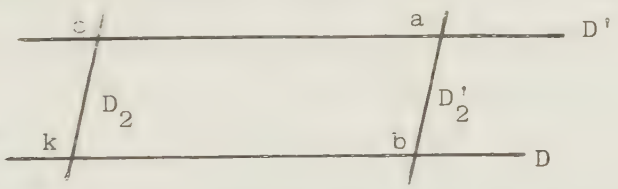


Cette propriété est pour E une forme affaiblie de l'axiome P de VIII. 14.

Proposition 2 : Tout enchaînement d'ordre 2 est direct.

Proposition 3 : Soit E une incidence à vrais parallélogrammes et $(D, \mathcal{D})$ un enchaînement d'ordre 2 pour E :
Toute parallèle D' à D rencontre toute droite D_2 de $\mathcal{D}_2$.

Preuve : On se donne D_2 et $D' \neq D$ puis on pose $k = D_2 \cap D$, $a \in D'$, D_2' la droite de $\mathcal{D}_2$ qui passe par a, $b = D_2' \cap D$ et c le quatrième sommet construit sur (a, b, k) ; D' et D_2 sont sécantes en c.



Proposition 4 : Pour une incidence translative les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) E_k est somme de deux droites passant par k.
ii) E possède un enchaînement d'ordre 2.
iii) E possède un enchaînement direct d'ordre 2.
iv) E_k est somme directe de deux droites passant par k.

Preuve : Théorème 1 et Proposition 2.

Proposition 5 : Pour une géométrie affine généralisée E les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) E est de rang 2.
ii) E possède un enchaînement d'ordre 2.

.../...

iii) E possède un enchaînement direct d'ordre 2.
iv) E est de dimension 2.

Preuve : Proposition 1, Théorème 2 et Proposition 2.

Nous pouvons présenter maintenant une des premières généralisations de la méthode d'Artin : il s'agit de [5] par C.J. Everett. La structure étudiée dans ce travail est pour nous, une géométrie affine généralisée de dimension 2 (Proposition 5) ; toutefois l'axiome équivalent à R 1 (VIII. 15) n'est utilisé qu'au moment de l'introduction des coordonnées (voir commentaires de VIII. 9), aussi l'auteur construit-il l'anneau des homomorphismes de T conservant les traces, pour une incidence translative qui possède un enchaînement d'ordre 2 (voir Proposition 4).

Dans [10] est présentée une généralisation de ce travail : << La memoria del prof. Permutti : "Geometrica affine su di un anello", fornisce una estensione n-dimensionale di un lavoro di C.J. Everett... >>
La structure étudiée est tout d'abord (postulats 2. 1 à 2. 6 de [10]) une incidence translative qui vérifie l'axiome G'' de VIII. 15 et qui possède un enchaînement direct d'ordre n : l'auteur construit l'anneau des homomorphismes de T conservant les traces ; ensuite il utilise un axiome équivalent à R 1 (VIII. 15) pour introduire les coordonnées : l'étude finale concerne donc une géométrie affine généralisée de dimension n (théorème 2).
Nous avons montré en VIII. 15 que R 1 implique G'' ; par conséquent le système des postulats 2. 1 à 2. 7 de [10] est redondant : la première phrase de 2. 6 peut être supprimée.

Cette remarque selon laquelle le système des postulats de R. Permutti pour une géométrie affine généralisée de dimension n est redondant, pose plus généralement la question de l'indépendance des axiomes qui nous ont servi à définir chacune des structures considérées jusqu'à présent ; on ne peut valablement y répondre que si l'on connaît des géométries plus générales que les notres, pour lesquelles par exemple deux droites distinctes peuvent avoir deux points distincts communs, ou encore qui ne vérifient pas l'axiome d'Euclide... C'est pourquoi nous nous contentons ici de poser ce problème fondamental.

VIII. 20

Nous avons vu en VIII. 18 que la notion de géométrie affine généralisée peut être reliée à une propriété arithmétique simple. Afin de situer complètement les travaux de C.J. Everett et R. Permutti dans notre étude (voir paragraphe précédent) nous revenons maintenant sur ce contexte arithmétique pour une géométrie affine généralisée de dimension n. Comme dans VIII. 18 les anneaux considérés sont associatifs, unitaires et sans diviseurs de zéro.

Définition : A est un anneau à P.G.C.D. si c'est un anneau pour lequel toute paire d'éléments possède un P.G.C.D.

Lemme 1 : Pour un anneau A les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) A est un anneau à P.G.C.D.

ii) Soit n un entier supérieur à 1 ; toute famille de n éléments possède un P.G.C.D.

Preuve : i) implique ii) : En raisonnant par récurrence on considère $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$, β, un de leur P.G.C.D. et γ un P.G.C.D. de $\{\beta, \alpha_n\}$: tout minorant de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, divise β et α_n donc divise γ.

ii) implique i) : Les P.G.C.D. de $\{\alpha, \beta\}$ sont ceux de $\{\alpha, \alpha, \ldots, \alpha, \beta\}$ ou de $\{\alpha, \beta, \omega, \ldots, \omega\}$.

On voit que :

Lemme 2 : Soit $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ un élément du A-module à droite A^n : $\alpha \in A$ divise b (VIII. 18, Définition 1) si et seulement si α est un minorant de $\beta_1, \ldots, \beta_n$ dans A.

Ainsi :

i) ε est un P.G.D. de $b \in A^n$ si et seulement si ε est un P.G.C.D. de $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$.

ii) b est premier dans A^n si et seulement si les éléments $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont premiers entre eux dans A.

Alors le Lemme 1 montre que :

Proposition : A^n est un A-module à P.G.D. (VIII. 18, Définition 2) si et seulement si A est un anneau à P.G.C.D.

Corollaire : A^n possède la propriété 1-maximale partitive si et seulement si A est un anneau à P.G.C.D.

Preuve : Cette proposition et VIII. 18, Théorème 2.

Soit A un anneau à P.G.C.D. : A^n, qui possède la propriété 1-maximale partitive (ce corollaire), est canoniquement une géométrie affine généralisée pour laquelle Ω est isomorphe à A (VIII. 17, Proposition 2) ; par conséquent A^n est une géométrie affine généralisée de dimension n (VIII. 19, Définition 2).
Réciproquement soit E une géométrie affine généralisée de dimension n : Ω^n, qui est isomorphe à E, est un Ω-module à P.G.D. (VIII. 18, Théorème 2) donc Ω est un anneau à P.G.C.D. (Proposition).
Ces commentaires montrent que :

Théorème : La classe des géométries affines généralisées de dimension n correspond biunivoquement à la classe des modules A^n où A est un anneau associatif, unitaire, sans diviseurs de zéro et à P.G.C.D.

Nous retrouvons ainsi le résultat de R. Permutti [10] et, pour $n = 2$, celui de C.J. Everett [5].
Cette géométrie sur A^n s'obtient de la façon suivante : une droite passant par $k = (\omega, \ldots, \omega)$ est le sous-module (monogène maximal) engendré par un élément $d = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ pour lequel les δ_j sont premiers entre eux dans A ; les droites de A^n sont les sous-espaces affines de A^n associés à ces droites passant par k (qui leur correspondent par une translation : $x \to x - a + b$) et cette relation d'association entre droites est une relation d'équivalence qui définit le parallélisme.

VIII. 21

Soit C un ensemble muni d'une relation de préordre $\mathcal{G}$ et D l'ensemble des parties X de C qui sont l'ensemble des majorants d'un élément x de C ; on ordonne D par inclusion et on considère sur C la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ associée à $\mathcal{G}$; $C' = C/\mathcal{R}$ est muni de l'ordre opposé à l'ordre canoniquement induit par $\mathcal{G}$.

Des éléments x et y de C ont les mêmes majorants si et seulement si $x \mathcal{R} y$; il en résulte que l'on peut définir l'application σ de C' dans D qui, à la classe de $x \in C$ associe l'ensemble X de ses majorants. Avec ces hypothèses on voit que :

Lemme 1 : σ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Soit N une partie de C et $x \in C$: x est un minorant de N si et seulement si $N \subset X$. Il en résulte :

Lemme 2 : N admet un plus grand minorant (ou plusieurs) dans C si et seulement si l'ensemble des éléments de D qui contiennent N possède un plus petit élément.

Théorème 1 : Avec les hypothèses précédentes, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Toute partie de C admet un plus grand minorant.

ii) D est un sous-inf-demi-treillis complet de l'ensemble des parties de C.

iii) Toute partie de C admet un plus petit majorant.

Preuve : i) implique ii) : Soit $(X_j)_{j \in J}$ une famille d'éléments de D, N leur intersection et Y l'élément de D associé à la classe des plus grands minorants de N : comme $N \subset Y$ et, pour tout $j \in J$, $Y \subset X_j$ on a : $N = Y$ donc $N \in D$.

ii) implique i) : Soit N une partie de C, (X_j) la famille des éléments de D contenant N : l'intersection des X_j est dans D par hypothèse et contient N.

Les propriétés i) et iii) étant duales, il suffit de montrer par exemple que :

i) implique iii) : Soit N une partie de C, M l'ensemble de ses majorants, N' l'ensemble des minorants de M et x un plus grand élément de N' : de $N \subset N'$, il résulte $x \in M$.

L'équivalence : i), iii), appliquée au cas de D vérifiant ii), nous donne la propriété classique selon laquelle D est en fait un treillis complet ; mais ce n'est pas, en général, un sous-sup-demi-treillis de l'ensemble des parties de C.

Appliquons maintenant ces considérations générales au cas particulier d'un anneau A (associatif, unitaire et sans diviseurs de zéro) muni de la relation de préordre $\mathcal{G}$ pour la divisibilité à droite (VIII. 18). La notion duale, correspondant au préordre opposé, est celle de multiple à gauche : α est multiple à gauche de β s'il existe α' tel que $\alpha = \alpha' \beta$.
Soit N une partie de A : un P.P.C.M. de N est un plus petit commun multiple de N c'est-à-dire un plus petit majorant de N pour la relation de préordre $\mathcal{G}$.
Soit $\alpha \in A$: l'ensemble des multiples à gauche de α c'est-à-dire l'ensemble des majorants de α pour la relation de préordre $\mathcal{G}$ est l'idéal à gauche $A\alpha$.
La propriété du Lemme 1 se traduit par : α divise β si et seulement si $A\beta \subset A\alpha$, et le théorème 1 par :

Théorème 2 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Toute partie de A admet un P.G.C.D.

ii) Toute partie de A admet un P.P.C.M.

iii) L'ensemble des idéaux à gauche monogènes de A est un sous-inf-demi-treillis complet de l'ensemble des idéaux de A.

Définition : Un anneau A est faiblement principal à gauche s'il possède la propriété iii) de ce théorème 2.
A est principal à gauche si tout idéal à gauche est monogène.

Sur un anneau A faiblement principal à gauche on peut parler de l'idéal à gauche monogène engendré par une partie N de A : c'est l'intersection S(N) des idéaux à gauche monogènes contenant N ; chaque générateur de S(N) est un P.G.C.D. de N. On peut aussi associer à N l'intersection I(N) des $A\alpha$ pour α parcourant N ; chaque générateur de I(N) est un P.P.C.M. de N.

Proposition 1 : Tout module à droite G libre sur un anneau A faiblement principal à gauche est un A-module à P.G.D. (VIII. 18, Définition 2).

Preuve : Il existe un ensemble J pour lequel G est isomorphe au A-module A^J des combinaisons linéaires formelles d'éléments de J. Soit $b = (\beta_j)$ un élément de G : α divise b si et seulement si, pour tout $j \in J$, les β_j sont dans $A\alpha$; par conséquent les β_j sont dans l'idéal $A\varepsilon$ intersection des idéaux $A\alpha$ où α parcourt l'ensemble des diviseurs de b. Il en résulte que ε est un diviseur de b (et c'est évidemment un des plus petits).

Corollaire : Tout anneau faiblement principal à gauche est un anneau à P.G.C.D. (VIII. 20, Définition).

Preuve : Cette proposition et VIII. 20, Proposition.

Nous dirons que A est un anneau $\mathbb{N}$-principal à gauche si tout idéal à gauche de type fini est monogène.
Un anneau $\mathbb{N}$-principal à gauche n'est pas nécessairement faiblement principal à gauche.
On voit que :

Proposition 2 : Tout anneau $\mathbb{N}$-principal à gauche est un anneau à P.G.C.D.

Quant aux anneaux principaux à gauche, ils sont à la fois $\mathbb{N}$-principaux à gauche et faiblement principaux à gauche.

Par cette étude nous avons précisé les conditions d'existence des géométries affines généralisées.
Rappelons la propriété de VIII. 16, Proposition 1 : si l'anneau Ω admet un corps des quotients à droite, alors la géométrie affine généralisée considérée est une sous-incidence d'une géométrie classique à partir d'un corps. C'est le cas, en particulier, lorsque l'anneau est principal (donc commutatif).
Par exemple, la géométrie affine généralisée de dimension n associée à Z^n est une sous-incidence de la géométrie classique sur un R-espace vectoriel de dimension n.
Lorsque l'anneau n'est pas commutatif, signalons qu'en appliquant la démonstration de Jacobson, the theory of rings, page 31, dans l'hypothèse $\mathbb{N}$-principal à gauche, on peut montrer qu'il existe un corps des quotients... mais à gauche !

VIII. 22

Définition : Soit E une incidence ; un sous-espace géométrique N de E est une partie N qui vérifie :

SE 1 : Si les points a et b sont dans N, alors la droite ab est dans N.

SE 2 : Si le point a et la droite D sont dans N, alors la parallèle à D par a est dans N.

L'ensemble vide, un point, une droite et E lui-même sont des sous-espaces géométriques.

L'intersection d'une famille de sous-espaces géométriques est un sous-espace géométrique. On peut ainsi définir le sous-espace géométrique engendré par une partie de E.
En particulier un plan (géométrique) est le sous-espace géométrique engendré par 3 points non alignés.

Proposition 1 : Soit E' une sous-incidence de l'incidence E : pour tout sous-espace géométrique N de E, $N' = N \cap E'$ est un sous-espace géométrique de E'.

Preuve : Si a et b sont dans N', la droite ab de E est dans N donc la droite ab de E' est dans N'.
Si a et D' sont dans N' avec $D' = D \cap E'$, alors a et D sont dans N donc aussi $\Delta \,//\, D$ par a ; ainsi $\Delta' \,//\, D'$ par a est dans N'.

Proposition 2 : Soit E une incidence et α une dilatation bijective.

i) L'image N' d'un sous-espace géométrique N par α est un sous-espace géométrique.

ii) Si N et N' ont deux points communs, ils sont confondus.

iii) Si α est une translation et $N \cap N' \neq \emptyset$, alors $N = N'$.

Preuve : i) Pour a' et b' dans N' et $c' \in a'b'$, les préimages sont alignées dans N donc $c' \in N'$.
Soit $d' \in N'$ et d sa préimage : l'image par α de la droite $D \,//\, ab$ et passant par d est la droite $D' \,//\, a'b'$ et passant par d' ; comme D est dans N, D' est dans N'.

ii) Soient a, b, $a\alpha$, $b\alpha$ dans N : la construction de $c\alpha$ (VIII. 3, Proposition) montre que pour tout $c \in N$, $c\alpha \in N$.

iii) Si a et $a\alpha$ sont dans N et si $\alpha \neq 1$, $a\,a\alpha$ est une trace de α contenue dans N et on applique ii).

Proposition 3 : Tout sous-espace géométrique N d'une incidence translative est un sous-espace affine.

Preuve : On voit (directement ou par la proposition 2) que N est stable par $a \oplus b$ et $a\alpha$.

Tout sous-espace affine d'un strict espace affine vérifie SE 2. Le problème de la détermination des sous-espaces affines qui sont des sous-espaces géométriques, c'est-à-dire qui vérifient SE 1, est semble-t-il ouvert.
Au Chapitre VII nous avons étudié les hyperplans : un premier travail important consisterait pour un strict espace affine plein d'hyperplans à déterminer dans quelles conditions les hyperplans vérifient SE 1.
Dans [11], G. Pizzarello, considérant un anneau principal à droite A, a étudié les sous-espaces de la géométrie affine généralisée de dimension n associée à A^n (VIII. 19). Nous traduisons la fin de son introduction : << la question de savoir si chaque sous-espace affine est effectivement un sous-espace géométrique n'est pas résolue... >>. Pour le cas particulier qu'il considère, G. Pizzarello a cru démontrer (théorème IX) que tout sous-espace géométrique est un hyperlan ; le résultat est sans doute exact mais la preuve avancée n'est pas satisfaisante : en effet, l'auteur utilisant le m-sous-espace : $V = P_1 H_1 + \ldots + P_m H_m$ (où les P_i sont des points de A^n et les H_i des idéaux de A) affirme que si V n'est pas un m-sous-espace maximal l'un des H_i est distinct de A. Comme contre exemple prenons $A = Z$, $m = n = 2$, $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (2, 1)$, $H_1 = H_2 = Z$: V est distinct de Z^2.

Lemme 1 : Soit E une incidence et a, b, c, 3 points non alignés.
Il existe un plan contenant a, b, c.

Preuve : La famille des sous-espaces géométriques contenant a, b, c n'est pas vide car elle contient E et son intersection est un plan puisque a, b, c ne sont pas alignés.

Considérons pour les plans d'une incidence les deux axiomes suivants :

Axiome π 1 : Deux droites coplanaires sont sécantes. ou //

Axiome π 2 : Pour toutes droites Δ, D non parallèles, l'ensemble des points des droites D' // D et rencontrant Δ est un plan.

On voit facilement qu'il est indifférent de remplacer dans cet axiome π 2 le mot "plan" par : "sous-espace géométrique".

Proposition 4 : Toute incidence qui vérifie π 1 vérifie les axiomes 4', T' et T".

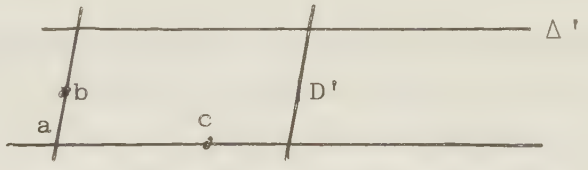
Preuve : Soit N le plan engendré par a, b, c non alignés : la parallèle à ab par c et la parallèle à ac par b sont dans N et non parallèles donc sécantes, d'où 4'.
Soit d un point de la parallèle à ac par b : $d \in N$; si ab et cd ne sont pas parallèles, elles sont sécantes, d'où T'.
Enfin T'' résulte de VIII. 13, Proposition 1.

Lemme 2 : L'axiome π 1 implique π 2.

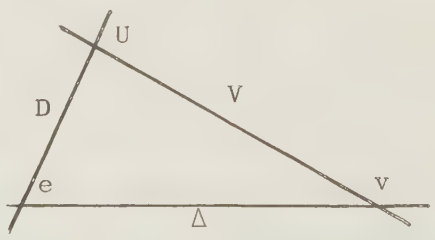
Preuve : Soit Δ, D deux droites non parallèles, N le plan engendré par les points des droites D' et $b \in N$: la parallèle D_b à D passant par b est dans N et non parallèle à Δ donc c'est une droite D'.

Lemme 3 : L'axiome π 2 implique l'axiome π 1.

Preuve : Soit N un plan et a, b, c 3 points qui l'engendrent : N est encore l'ensemble des points des droites $D' \,//\, ab$ et rencontrant ac ou l'ensemble des points des droites $\Delta' \,//\, ac$ et rencontrant ab.



Soit D_1 une droite parallèle à ab et N' le plan (d'après π 2) ensemble des droites $\Delta'' \,//\, ac$ et qui rencontrent D_1 : N' contient b (SE 2) donc $N' = N$; ainsi l'ensemble des droites Δ'' est égal à l'ensemble des droites Δ'. De cela il résulte que toute droite Δ' rencontre toute droite D'.
Soit V une droite de N ni parallèle à ab ni parallèle à ac, u et v deux points de V, D (resp. Δ) la droite D' (resp. Δ') passant par u (resp. v) et $e = D \cap \Delta$:



Le plan engendré par e, u, v est l'ensemble des points des droites $D'' \,//\, D$ qui rencontrent Δ, c'est donc N lui-même.

.../...

Les points e, u, v jouant pour N des rôles analogues, V rencontre toute droite D' et toute droite Δ'.
Ce même raisonnement appliqué à une droite W de N, non parallèle à V, montre que W rencontre V.

Les Lemmes 2 et 3 montrent que :

Proposition 5 : Pour une incidence les axiomes π 1 et π 2 sont équivalents.

Une incidence est arguésienne si elle l'est à la fois faiblement et fortement.

Théorème : Toute incidence arguésienne E qui vérifie l'un des axiomes équivalents π 1 ou π 2 est une géométrie classique à partir d'un corps.

Preuve : E, qui vérifie les axiomes 4' et 4'', est une incidence translative. Ensuite E vérifie les axiomes T et D d'où l'assertion (VIII. 14, Théorème 3).

Dans [8], Howard Levi définit sur l'ensemble des parties d'une incidence une loi binaire appelée "affine product", notée : (M, N) → M * N et telle que : M * N est l'ensemble réunion des points de M et des droites D' qui rencontrent M et qui sont parallèles à une droite contenue dans N.
Lorsque N contient effectivement une droite, M * N est l'ensemble des points des droites D'.
La construction de H. Levi concerne certaines incidences vérifiant l'axiome suivant :

Axiome IV : Si M et N sont des sous-espaces géométriques, alors M * N est un sous-espace géométrique.

On voit qu'en limitant cet axiome aux droites, on obtient notre axiome π 2. Comme l'auteur utilise encore un axiome V après lequel l'incidence considérée est arguésienne, cette construction conduit (théorème ci-dessus) à une géométrie classique à partir d'un corps.

Nous terminerons en commentant une généralisation au cas n-dimensionnel de la construction de E. Artin qui nous a servi de modèle au début de notre étude : il s'agit de [6] par S. Iyanaga et K. Matzusaka.

Les auteurs considèrent un ensemble E muni d'une famille L de parties chacune affectée d'un nombre, compris entre -1 et n, $n > 2$, qui est sa dimension. L contient E et les éléments de E, appelés points, sont les éléments de L de dimension 0 ; les éléments de L de dimension 1 (resp. 2) sont appelés droites (resp. plans) ; E est l'unique élément de L de dimension n.
Les axiomes n.i, avec i de 0 à 4, permettent de munir L d'une structure de treillis de telle sorte que chaque partie de dimension k soit le sup de (k+1) points. En particulier 2 points distincts déterminent une unique droite.
Les droites D et Δ sont dites parallèles si $D = \Delta$ ou si $D \cap \Delta = \emptyset$ avec D et Δ coplanaires ; cette relation sur les droites est une relation d'équivalence et l'axiome n. 4 correspond à l'axiome d'Euclide. Ainsi E est une incidence et les auteurs montrent qu'elle est arguésienne.
Deux droites coplanaires ne pouvant être que parallèles ou sécantes, on voit que E vérifie notre axiome π 1.
Par conséquent (théorème) E est une géométrie classique à partir d'un corps ; on remarquera que l'espace vectoriel associé est ici de dimension n.

Nous pensons que l'étude des sous-espaces géométriques ouvre de grandes perspectives de recherche.
Il conviendrait tout d'abord, pour une classe donnée de déterminer les incidences qui sont des plans.
Ensuite on doit pourvoir faire apparaître des axiomes naturels pour les plans, donnant lieu à des incidences, préincidences ou prégéométries connues ou encore inconnues...

Références pour le Chapitre VIII

1 J. André : Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe M. Z. Bd, 60, S. 156, (1954).

2 J. André : Über Parallelstrukturen. II. M. Z. 76, S. 155, (1961).

3 H. Arnold : Journal of geometry 1. 2 (1971).

4 E. Artin : Algèbre géométrique. Paris (1962).

5 C.J. Everett : Affine geometry of vector spaces over rings. Duke Math. J. 9, P. 873, (1942).

6 S. Iyanaga et K. Matsuzaka : Affine geometry and projective geometry. J. Fac. Sc. Tokyo. 14 (1967).

7 H. Lenz : Zur Begründung der analytischen Geometrie. Bayerische Académie der Wissenschaften (1954).

8 H. Levi : Foundations of geometric algebra. Rendiconti di Matematica. 2. (1969).

9 H. Lüneburg : Affine Hjelmslev-Ebenen mit transtiver Translationsgruppe. M. Z. 79. S. 260 (1962).

10 R. Permutti : Geometria affine su di un anello. Atti della Accad. Naz. dei Lincei. Série VIII. Volume VIII. (1967).

11 G. Pizzarello : Sugli spazi affini sopra un anello. Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste 1 P. 98 (1969).

12 E. Sperner : Affine Räume mit schwacher Inzidenz und zugehörige algebraische Strukturen. J. Reine Angew. Math. 204 (1960).

IX. 1

Définition : Un binaire est un ensemble muni d'une loi de composition binaire : $(a,b) \to ab$.

Notation : Soit B un binaire : $(B)\mathcal{A}$ est le demi-groupe unitaire des applications de B dans B et D (resp. G) la partie de $(B)\mathcal{A}$, ensemble des d_a : $(x)d_a = xa$ (resp: g_a : $(x)g_a = ax$).

Si D a pour unique élément l'application identique $\mathcal{J}$ sur B, la loi binaire sur B est : $ab = a$; cette loi est associative, tout élément est idempotent, neutre à droite et zéro à gauche. Suivant Clifford et Preston un tel binaire sera appelé : demi-groupe zéro à gauche.

Selon ces mêmes auteurs, un binaire est réductif à gauche si : "$xa = xb$ pour tout $x \in B$, implique $a = b$" ; c'est la condition pour que l'application canonique : $a \in B \to d_a \in D$ soit injective.

L'élément a du binaire B est simplifiable (resp: dominant) à droite lorsque l'application d_a est injective (resp: surjective). Dans ce cas l'équation : $xa = b$ admet au plus (resp: au moins) une solution.

Lorsque le binaire B, possède un neutre à droite, on note N_d le sous-demi-groupe zéro à gauche des éléments neutres à droite dans D (et N_g pour les neutres à gauche).

IX. 2

Soit B un demi-groupe :

i) D et G sont des sous-demi-groupes de $(B)\mathcal{A}$ $(d_a\, d_b = d_{ab})$.

ii) Pour tous $d \in D$, $g \in G$: $dg = gd$.

Considérons maintenant un binaire B pour lequel ii) est vérifié ; alors pour tous a,b,x, $b(xa) = (bx)a$: B est un demi-groupe.

Définition : Le binaire B est bon à droite si D est un sous-demi-groupe de $(B)\mathcal{A}$.

Alors pour tous a,b il existe e tel que : $d_a\, d_b = d_e$.

Si le binaire bon à droite B possède un neutre à gauche k alors : (ka)b = ke s'écrit : ab = e donc : (xa)b = x(ab) pour tous a,b,x : B est un demi-groupe.

Notation 1 : Soit B un binaire fini et T la table de l'opération sur B ; on note X (resp. Y) l'ensemble des éléments de la ligne de x (resp. y).

Proposition 1 : Avec les notations précédentes, s'il existe x et y dans le binaire B tels que $y \in X$ et $Y \not\subset X$, alors B n'est pas bon à droite.

Preuve : Si un binaire B (non nécessairement fini) est bon à droite $y \in x\,B$ implique $y\,B \subset x\,B$.

Notation 2 : On complète notation 1 : T_a est la table obtenue en remplaçant dans T la colonne d'entrée par la colonne de a et en complétant selon la loi sur B, la ligne d'entrée restant la même.

Proposition 2 : Avec les notations précédentes, B est bon à droite si et seulement si quel que soit $a \in B$, pour chaque colonne de T_a il existe dans T une colonne identique.

Preuve : (xa) b = xe , pour x parcourant la colonne d'entrée de T.

Dans un autre travail [1], nous avons appelé demi-groupe gauche (resp. droit) un binaire tel que pour tous a,b,c :

$$b(ac) = (ab)c \qquad (\text{resp.}\ (ab)c = a(cb)).$$

Nous avons montré qu'un tel binaire n'est pas nécessairement un demi-groupe. Un demi-groupe gauche est un binaire bon à gauche pour lequel l'application : $a \in B \rightarrow g_a \in G$ est un morphisme.

Les propositions précédentes permettent de décider si un binaire fini est bon à droite ou ne l'est pas ; on les adapte aisément pour la propriété bon à gauche.

Exemple 1 : $B = \{a,b\}$ avec la table T :

	a	b
a	b	b
b	a	a

La ligne de b n'étant pas contenue dans la ligne de a, B n'est pas bon à droite (proposition 1).

Les colonnes étant les mêmes, il est immédiat que $x(yz)$ ne dépend que de x donc peut s'écrire xt .

Ainsi B est bon à gauche.

Exemple 2 : $B = \{a,b,c,d,e\}$ avec la table T :

	a	b	c	d	e
a	a	b	a	b	a
b	b	a	b	a	b
c	a	b	b	a	a
d	b	a	a	b	b
e	a	b	a	b	a

On vérifie pour T_a, T_b, T_c, T_d, T_e la propriété de proposition 2 ; d'autre part B est commutatif.

Ainsi : B est bon (à droite et à gauche).

Or : $(cc)b = bb = a$

$c(cb) = cb = b$.

B n'est pas un demi-groupe.

IX. 3

Complétons les notations de IX. 1 : W est le demi-groupe engendré dans (B) par $D \cup G$.

Un élément u de W s'écrit $u_1 \dots u_n$ avec les u_i dans $D \cup G$; quel que soit $x \in B$, $(x)\, u_1 \dots u_n$ est indépendant de l'expression de u en fonction des u_i puisque c'est l'image de x par l'application u.

Le binaire B est quasi unitaire si W contient l'application identique $\mathcal{I}$; dans ce cas il existe une famille $a_1, \dots, a_n$ d'éléments de B tels que pour tout $x \in B$: $x = (x)\, u_{a_1} \dots u_{a_n}$, avec $u_{a_i} \in D \cup G$.

Si $n = 1$, a_1 est neutre à droite ou à gauche suivant que $u_{a_1} = \mathcal{I}$ est dans D ou dans G.

Proposition 1 : Avec les notations précédentes et pour $n > 1$:

a_1 est simplifiable à droite ou à gauche.

a_n est dominant à droite ou à gauche.

Preuve : u_{a_1} est injective et u_{a_n} surjective.

Nous allons préciser pour $n = 2$.

Dans les égalités ci-après, les lettres ont la signification suivante

a : a étant donné dans B

a' : il existe a' dans B, tel que

x : pour tout $x \in B$

Ceci étant on pose

$I_1 : (xa)a' = x$; $I_2 : (xa')a = x$; $I_3 : a'(ax) = x$; $I_4 : a(a'x) = x$;

$I_5 : a'(xa) = x$; $I_6 : a(xa') = x$; $I_7 : (ax)a' = x$; $I_8 : (a'x)a = x$

Proposition 2 : Soit B un binaire :

i) Si (a,a') vérifie I_1 et (a,a'') I_2 alors (a,a') vérifie I_2 et (a,a'') I_1.

ii) Si (a,a') vérifie I_1 et (a,a'') I_8 alors (a,a') vérifie I_2 et (a,a'') I_5.

iii) Si (a,a') vérifie I_5 et (a,a'') I_2 alors (a,a') vérifie I_8 et (a,a'') I_1.

iv) Si (a,a') vérifie I_5 et (a,a'') I_8 alors (a,a') vérifie I_8 et (a,a'') I_5.

Preuve : Il existe u' et u'' dans $D \cup G$ tels que : $d_a\, u' = u''\, d_a$ par conséquent d_a est inversible dans $(B)\mathcal{A}$ et $u' = u''$ est son unique inverse. Ainsi pour i) : $d_{a'} = d_{a''}$, pour ii) : $d_{a'} = g_{a''}$, pour iii) : $g_{a'} = d_{a''}$ et pour iv) : $g_{a'} = g_{a''}$.

Propriétés analogues en considérant g_a ...

On voit que a' et a'' jouent le même rôle en i) et iv) mais pas en ii) et iii) : si en ii) ou iii) on impose : $a' = a''$ alors $d_{a'} = g_{a'}$ donc a' est central dans B.

Dans le même contexte, supposons qu'un couple (a,a') vérifie I_4 et I_5 ; $g_{a'}\, g_a = \mathcal{J} = d_a\, g_{a'}$, donc $d_a = g_a$ et a est central dans B.

Soit B un binaire et $k \in B$, neutre à droite ou à gauche : nous indiquons dans le tableau qui suit les couples (i,j) pour lesquels : (a,a') vérifie I_i et (a,a'') vérifie I_j impliquent : $a' = a''$

k neutre à gauche	k neutre à droite	k neutre
(1,2)	(3,4)	(1,3)
(1,5)	(3,5)	(1,8)
(1,7)	(3,7)	(2,5)
(6,7)	(5,8)	(3,6)
		(4,7)

Montrons-le pour I_1 et I_2 avec k neutre à gauche :
par I_2 : $(ka'')a = k = a''a$ et par I_1 : $a' = ka' = (a''a)a' = a''$.

Proposition 3 : Soit B un binaire et $a \in B$:

i) Si a vérifie I_1 , N_g (IX. 1) a au plus un élément.

ii) Si a vérifie I_2 et B est bon à droite, N_d n'est pas vide.

iii) Si a vérifie I_5 et B est un demi-groupe, B est unitaire ; a est inversible et central.

Preuve : iii) : Par I_5 : $g_{a'} = g_{a'a'a} = g_a\, g_{a'}\, g_{a'}$ et $g_{a'}\, d_a = d_a\, g_{a'} = J$: $g_{a'}$ est inversible dans $(B)\mathcal{A}$ et son inverse est $d_a = g_a$. De même $d_{a'} = g_{a'}$.

On adapte, pour I_j , i) avec j de 1 à 8 , ii) avec j de 1 à 4 et iii) avec j de 5 à 8 .

Corollaire : Si un binaire bon possède a vérifiant I_1 ou I_2 et b vérifiant I_3 ou I_4 , c'est un demi-groupe unitaire.

IX. 4

Soit B un binaire et $a \in B$ pour lequel d_a est inversible dans $(B)\mathcal{A}$ et $d_a^{-1} \in D$; G : a est d-inversible (resp. dg-inversible) si $d_a^{-1} \in D$ (resp. G) ; tout a' tel que $d_a^{-1} = d_{a'}$ (resp. $g_{a'}$) est d-inverse (resp. dg-inverse) pour a. On sait que (a,a') vérifie I_1 et I_2 (resp. I_5 et I_8).
De même : g-inversible et gd-inversible...

Le tableau de IX. 3 montre que si B contient un neutre à gauche (resp. à droite) il y a unicité pour le d-inverse (resp. dg-inverse) d'un élément.

Si B est un demi-groupe et a' un d-inverse pour a alors B possède des neutres à droite h et k tels que : $aa' = h$ et $a'a = k$.
Un demi-groupe zéro à gauche (IX. 1) est un demi-groupe dans lequel tout élément est d-inversible.
Si B est un demi-groupe et a est dg-inversible, B est unitaire, a est inversible et central (IX. 3 Proposition 3 , iii)).

L'application u étant inversible dans (B)$\mathcal{A}$ si et seulement si elle est bijective, on voit que :

Proposition 1 : Soit B un binaire et $a \in B$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) a vérifie I_1 (resp. I_5) et est dominant à droite.

ii) a vérifie I_2 (resp. I_8) et est simplifiable à droite.

iii) a est d-inversible (resp. dg-inversible).

Proposition 2 : Soit B un demi-groupe et $a \in B$:

Si a est dominant à droite et simplifiable à droite, alors a est d-inversible.

Preuve : Il existe k : $ka = a$ ou $aka = aa$ soit $ak = a$; donc dans D : $d_a d_k = d_a$ et comme d_a , qui est bijective, est inversible dans (B)$\mathcal{A}$, $d_k = \mathcal{J}$. D'autre part il existe a' : $a'a = k$, donc $d_a^{-1} \in D$.

Si une propriété est vérifiée par tout élément de B on dit abusivement qu'elle est vérifiée par B. Toutefois il arrive que le zéro soit admis comme exception.

Théorème : Si B vérifie I_1 (resp. I_2) alors B est d-inversible.

Preuve : Soit $d \in D$: il existe $d' \in D$ et $d'' \in D$ tels que $dd' = d'd'' = \mathcal{J}$ (resp. $d'd = d''d' = \mathcal{J}$) ; d' est donc inversible et $d = d''$ est inversible.

Proposition 3 : B vérifie I_5 et I_7 si et seulement si B vérifie I_6 et I_8.

Preuve : Soit $d \in D$: sous I_5 puis I_7 il existe $g' \in G$ et $d'' \in D$ tels que : $dg' = g'd'' = \mathcal{J}$; g' est donc inversible et $d = d''$ est son inverse :

$g'd = \mathcal{J}$ traduit I_8 .
Partant de $g \in G$, par I_7 puis I_5 on obtient I_6 .
De même dans l'autre sens.

IX. 5

Dans ce paragraphe B est un demi-groupe.
L'application : $a \in B \rightarrow d_a \in D$ est un morphisme surjectif.
En particulier si N_d n'est pas vide, $d_a = \mathcal{J}$ $d_a = d_{ka}$, avec $k \in N_d$; ainsi l'image réciproque de d_a contient $N_d\, a$. Si de plus a est d-inversible, $d_a = d_b$ implique $\mathcal{J} = d_b\, d_{a'} = d_{ba'}$ soit $ba' \in N_d$ et $b = (ba')a \in N_d\, a$.

Proposition 1 : Soit B un demi-groupe.

i) Pour tout $a \in B$, d-inversible, il existe un unique neutre à droite a^o tel que : $a^o a = a$.

ii) Pour tout couple (a,b) d'éléments d-inverses :
$ab = a^o$ et $ba = b^o$.

Preuve : i) Existence : $a \in N_d\, a$
Unicité : a est simplifiable à droite.
ii) $aba = a = a^o a$ implique $ab = a^o$.

Corollaire : Soit B un demi-groupe et $a \in B$, d-inversible :

La correspondance qui au d-inverse b pour a associe $b^o \in N_d$ est bijective.

Preuve : Injective : par $ba = b^o$ puisque a est simplifiable à droite.

Surjective : si a' est d-inverse pour a, $k \in N_d$ et $b = ka'$ alors b est d-inverse pour a et $b^o = k$.

Théorème : Tout demi-groupe B vérifiant l'hypothèse :

"Pour tout $a \in B$ il existe un unique $a^o \in N_d$ tel que $a^o a = a$ ",

est isomorphe au produit du demi-groupe zéro à gauche N_d par le demi-groupe unitaire D.

Preuve : On considère ψ : $a \in B \rightarrow (a^o , d_a) \in N_d \times D$.

.../...

ψ est injective : $a = a^{o}a = a^{o}b = b^{o}b = b$

ψ est surjective : (k,d_a) est image de ka par ψ

ψ est un morphisme :

$$(ab)\psi = (a^{o},d_{ab}) = (a^{o}b^{o}\ ,\ d_a d_b) = (a)\psi\ (b)\psi\ .$$

Voici quelques applications de cet important théorème :

Un binaire est auto-dominant à droite si pour tout a il existe b tel que : $ba = a$.

Corollaire 1 : Tout demi-groupe B simplifiable à droite et auto-dominant à droite est isomorphe au produit d'un demi-groupe zéro à gauche par un demi-groupe unitaire simplifiable à droite.

Preuve : Pour tout a il existe a^{o} tel que $a^{o}a = a$. B étant simplifiable à droite, a^{o} est unique. Enfin a^{o} est neutre à droite puisque pour tout $x \in B$: $xa = xa^{o}a$ implique : $x = xa^{o}$.

D est simplifiable à droite puisque toute application de D est injective.

Un binaire est auto-simplifiable à droite si tout élément a vérifie :
"$xa = ya = a$ implique $x = y$".

Corollaire 2 : Tout demi-groupe B dominant à droite et auto-simplifiable à droite est isomorphe au produit d'un demi-groupe zéro à gauche par un groupe.
Il en résulte que B est d-inversible.

Preuve : Pour tout a il existe un unique a^{o} tel que : $a^{o}a = a$.
Ainsi : $a^{o}a^{o}a = a^{o}a = a$ d'où $a^{o}a^{o} = a^{o}$.
Soit $x \in B$: il existe y tel que : $ya^{o} = x$, par suite :
$xa^{o} = y\ a^{o}a^{o} = y\ a^{o} = x$ donc a^{o} est neutre à droite.
Le demi-groupe D est dominant à droite et contient $\mathcal{T}$ donc toute application de D est bijective.

Corollaire 3 : Tout demi-groupe d-inversible est isomorphe au produit d'un demi-groupe zéro à gauche par un groupe.

Preuve : Proposition 1 et théorème.

Nous appelons d-groupe (resp. g-groupe) un demi-groupe d-inversible (resp. g-inversible).
La propriété fondamentale de ce corollaire 3, donnant la structure des d-groupes a été établie, de différentes façons, par de nombreux auteurs (voir [4]). Cependans il nous semble que notre preuve est originale ; en tous cas c'est une des plus élémentaires.

Dans son article : "On a generalization of groups", [5], H. Hashimoto définit un G-système comme un demi-groupe muni d'une loi unaire $a \to a'$ qui vérifie :
II) : $a'ab = b$ et III) : $(ab)' = b'a'$.
Soit H un G-système au sens précédent : par l'axiome II), H possède la propriété I_3 de IX. 3 donc (IX. 4 Théorème) H est un g-groupe.
Réciproquement :

Proposition 2 : Tout g-groupe est un G-système.

Preuve : On choisit $\varepsilon \in N_g$ et on considère sur $N_g \times G$ (notations de IX. 1) la loi unaire : $(a^o , g_a)' = (\varepsilon , g_a^{-1})$: elle vérifie les axiomes II) et III) d'un G-système.

Par cette proposition 2, nous venons de montrer que le système des axiomes de H. Hashimoto de [5] est redondant : le III) est superplu.

Compte tenu de nos résultats précédents, rappelons ici quelques propriétés pour lesquelles un demi-groupe B est d-inversible :
i) D est un groupe.
ii) B vérifie I_1 (resp. I_2).
iii) D est simplifiable (propriété équivalente à la suivante).
iv) B est simplifiable à droite et dominant à droite.
v) Toute équation $xa = b$ admet une unique solution.
vi) B est dominant à droite et auto-simplifiable à droite.
vii) Pour tout a il existe a' tel que aa' (resp. a'a) soit neutre à droite.

Remarquons pour terminer qu'un demi-groupe d-inversible est un groupe si et seulement si N_d a un unique élément. Nous avons là une justification de la propriété caractérisant un groupe B :
"B est un demi-groupe possédant k neutre à droite et pour tout $a \in B$ il

existe $b \in B$ tel que : $ab = k$."
En effet : B est d-inversible et si a est neutre à droite :
$k = ab = aab = ak = a$.

IX. 6

Soit B un binaire et $a \in B$:
a est inversible à droite (resp. à gauche) s'il existe a' et a" tels que (a,a') vérifie I_1 (resp. I_2) et (a,a") vérifie I_4 (resp. I_3) ;
a est inversible s'il est inversible à gauche et à droite.

On voit que :
*) Si a est inversible à droite et k est neutre : $k = aa' = aa''$.
*) a est inversible si et seulement si il est d-inversible et g-inversible.

Les définitions précédentes présentent l'avantage de redonner les propriétés classiques dans le cas des demi-groupes ; elles ont certains inconvénients :
i) Si a est inversible à droite, d_a est inversible à droite mais g_a est inversible à gauche.
ii) Si a est d-g-inversible et g-d-inversible, il n'est pas nécessairement inversible.

Dans un autre travail [2] nous avons étudié le cas général ; les principaux résultats sont indiqués dans une note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris (t. 277, p. A-409).

Proposition 1 : Si le binaire B est inversible à droite alors B est inversible.

Preuve : IX. 4 Théorème.

Théorème : Soit B un binaire et a inversible dans B :
a admet un unique d-inverse $\bar{a}$ et un unique g-inverse $\bar{\bar{a}}$.
Si B est unitaire alors : $\bar{a} = \bar{\bar{a}}$.

Preuve : d_a (resp. g_a) admet un unique inverse et B est réductif (IX. 1) ; le tableau IX. 3 justifie la dernière assertion.

Soit B un binaire et a inversible dans B : a' est inverse pour a si (a,a') vérifie I_1, I_2, I_3 et I_4. Le théorème précédent montre que a admet ou bien un unique d-inverse et un unique g-inverse distincts ou bien un unique inverse (on remarquera que cette propriété est indépendante d'une éventuelle hypothèse d'associativité).

Dans [3], R.H. Bruck a introduit la structure de "groupoïde avec l'inverse propriété" : il s'agit d'un binaire muni de deux lois unaires : $\lambda : a \to a^L$ et $\rho : a \to a^R$, telles que :

$$a^L(ax) = x \qquad \text{et} \qquad (xa)a^R = x .$$

Proposition 2 : La notion de groupoïde avec l'inverse propriété au sens de [3] est équivalente à celle de binaire inversible.

Preuve : Tout binaire inversible est muni (théorème) des lois unaires $a \to \bar{\bar{a}}$ et $a \to \bar{a}$, telles que : $\bar{\bar{a}}(ax) = x$ et $(xa)\bar{a} = x$.
Réciproquement si un binaire est muni des deux lois unaires λ et ρ, il vérifie I_3 et I_1 de IX. 3 donc (IX. 4 Théorème) il est d-inversible et g-inversible.

Une congruence $\mathcal{R}$ sur un binaire est normale à droite (resp. à gauche) si $xa \mathcal{R} ya$ (resp. $ax \mathcal{R} ay$) implique $x \mathcal{R} y$ (Birkhoff, Lattice theory).

Proposition 3 : Un binaire inversible B est un quasi-groupe dans lequel toute congruence est normale.

Preuve : B étant simplifiable et dominant est un quasi-groupe ; d'autre part $xa \mathcal{R} ya$ implique $(xa)a' \mathcal{R} (ya)a'$ puisque $\mathcal{R}$ est une congruence, c'est-à-dire $x \mathcal{R} y$.

IX. 7

Définition : Le binaire B est à involution $\wedge$ si $\wedge$ est un élément involutif de (B) $\mathcal{A}$ dans le centraliseur de $D \cup G$.

Lemme 1 : Soit B un binaire et $\wedge$ une involution ; B est à involution $\wedge$ si et seulement si est vérifié :
K_4 : $\widehat{ab} = \hat{a}\, b = a\, \hat{b}$ pour tous a,b de B.

On en déduit les deux propositions suivantes :

Proposition 1 : Soit B un binaire à involution $\wedge$:

$\wedge$ est fixe sur tout zéro à droite ou à gauche.

Proposition 2 : Soit B un binaire à involution :

Pour tout $a \in B$: $\hat{a}^2 = a^2$.

En particulier si B est idempotent : $\wedge = \jmath$.

Soit B un binaire à involution $\wedge$: si u_a est dans $D \cup G$:
$\wedge u_a = u_a \wedge = u_{\hat{a}}$ que l'on note : $\hat{u}_a$.
Considérons maintenant W (IX. 3) : $\wedge$ est dans le centraliseur de W ; soit $u = u_1 \ldots u_n \in W$, avec les u_i dans $D \cup G$: on note : $\hat{u} = \wedge u = u \wedge$: c'est l'un quelconque des $u_1 \ldots \hat{u}_i \ldots u_n$ pour i de 1 à n, par conséquent : $\hat{u} \in W$. Enfin on vérifie que cette involution sur le demi-groupe W vérifie K_4 , d'où :

Lemme 2 : Si B est un binaire à involution $\wedge$ alors W est canoniquement un demi-groupe à involution $\wedge$.

Soit W' le centraliseur de $\wedge$ dans (B) $\mathfrak{R}$: c'est un demi-groupe contenant W, $\jmath$ et $\wedge$. Si sur W' on pose : $\hat{u} = u \wedge = \wedge u$, alors W' est un demi-groupe à involution dans lequel est plongé W.
Il est remarquable que dans W' l'involution s'exprime simplement à l'aide de la loi binaire par : $\hat{u} = u \wedge$, avec $\wedge \in$ W'.

Proposition 3 : Soit B un binaire à involution $\wedge$.

Si B est quasi unitaire alors $\wedge$ s'exprime à l'aide de la loi binaire.

Preuve : W contient $\jmath$, donc W contient : $\wedge = \jmath \wedge = \overset{\wedge}{\jmath}$. Par conséquent il existe $u_1, \ldots, u_n$ dans $D \cup G$ tels que : $\wedge = u_1 \ldots u_n$.

Par exemple si B contient k neutre à droite : $\hat{a} = a \hat{k}$.

Soit $B = \{a,b\}$ un binaire à involution $\wedge$ qui échange a et b. Compte tenu de K_4 la table de l'opération binaire est déterminée par la donnée de a^2 ce

qui offre deux possibilités ; mais si $a^2 = b$ alors $b^2 = b$ (proposition 2) donc il existe, à un isomorphisme près, une seule structure représentée par exemple par la donnée de la table :

	a	b
a	a	b
b	b	a

C'est la structure de $(Z/2, \oplus)$ avec l'involution $\wedge$ qui échange 0 et 1 ($\hat{x} = x \oplus 1$).

Théorème : Tout binaire à involution peut être plongé dans un binaire unitaire à involution.

Preuve : Soit B un binaire à involution $\wedge$. Les éléments de $(Z/2, \oplus)$ étant notés 1 et $\wedge$, où 1 est le neutre, on pose $B' = B \amalg Z/2$ (union disjointe), B' est un binaire pour les lois canoniques sur B et sur $Z/2$, et pour :

$$a \wedge = \wedge a = \hat{a}$$

$$a\ 1 = 1\ a = a \quad , \qquad \text{où } a \in B.$$

On vérifie que, muni de la loi unaire : $x \to x \wedge$, B' est un binaire à involution dans lequel B est plongé.

IX. 8

Soit B un binaire et $\Lambda = \{\lambda\}$: la notation de Lukasiewicz consiste à écrire le produit : ab sous la forme : ab λ. Ainsi ((ab) (cd))e s'écrit : ab λ cd $\lambda\lambda$ e λ .

Lemme 1 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) a est un produit d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ de B (n positif).

ii) a est une suite : $s_1\ s_2 \ldots s_{2n-1}$ comportant $x_1, \ldots, x_n$, et (n-1) fois λ. Toute partie $s_1 \ldots s_k$ comporte strictement moins de λ que de x_i .

Ainsi : $s_1 = x_1$; $s_2 = x_2$; $s_{2n-1} = \lambda$.

Pour les autres indices j, s_j peut être indifféremment λ ou un élément de B, et le partage est égal.

Soit X un ensemble (non vide), $\Lambda = \{\lambda\}$ et L l'ensemble des suites finies non vides a d'éléments de $X \coprod \{\lambda\}$ vérifiant le ii) du lemme précédent.
On identifie l'élément x de X et la suite x de L.
Soit a et b deux éléments de L : on note ab λ la suite obtenue par juxtaposition de a puis b puis λ ; ab λ étant un élément de L, L est un binaire.

Soit B un binaire et θ une application de X dans B : on définit canoniquement une application ψ de L dans B qui prolonge θ et qui est un morphisme de binaires : L est le binaire libre pour l'ensemble X.

Considérons sur L la relation : a et b ont les mêmes éléments de X dans le même ordre, abstraction faite des λ ; c'est une congruence sur L. Le binaire quotient D est le demi-groupe libre pour l'ensemble X.
D est l'ensemble des suites finies non vides d'éléments de X avec le produit par juxtaposition.

Contemplons sur D la relation : a et b ont les mêmes éléments de X , abstraction faite de leur ordre ; c'est une congruence sur D. Le binaire quotient C est le demi-groupe commutatif libre pour l'ensemble X .
On peut considérer C comme l'ensemble des applications de X dans $(\mathbb{N}, +)$, non nulles sur une partie finie non vide de X , avec la loi binaire définie par :

$$(x)\ ab = (x)\ a + (x)\ b \qquad \text{pour tout } x \in X .$$

On sait adjoindre un élément unité à un binaire. Pour L, D, C précédents on peut adjoindre la suite vide. Les propriétés universelles s'appliquent alors dans des catégories de binaires unitaires.

Soit X un ensemble à involution $\wedge$ (VII. 5) et L le binaire libre pour l'ensemble X. On dit que l'on fait apparaître des $\wedge$ dans la suite $a \in L$ si l'on remplace effectivement certains x (ou aucun) de a par $\hat{y}$ $(x = \hat{y})$.
Soit $\mathcal{R}$ la relation sur L : a $\mathcal{R}$ b si et seulement si il existe une "suite" a' déduite de a en faisant apparaître des $\wedge$ et telle que :
i) a' comporte un nombre pair de $\wedge$.
ii) a', abstraction faite des $\wedge$, est égale à b.

Lemme 2 : $\mathcal{R}$ est une congruence sur L.

Preuve : $\mathcal{R}$ est symétrique car $\wedge$ est involutive et transitive car b' est une a" (la parité du nombre des $\wedge$ est conservée).
Si $a \mathcal{R} b$ et $c \mathcal{R} d$ alors $ac\lambda \mathcal{R} bd\lambda$ car la juxtaposition de a' puis c' puis λ est une suite (ac)' qui vérifie i) et ii) pour $bd\lambda$.

On note $\hat{L}$ le binaire quotient de L par $\mathcal{R}$.

Soit $a \in L$: on note a_i l'élément de L obtenu en remplaçant x_i par l'élément $\widehat{x_i}$ de X. On voit que :

Lemme 3 :

i) $a \mathcal{R} b$ implique $a_i \mathcal{R} b_i$.
ii) Pour tous i,j compatibles avec la longueur de a : $a_i \mathcal{R} a_j$.

Par ce lemme on peut munir $\hat{L}$ de l'involution canonique qui à a modulo $\mathcal{R}$ associe a_i modulo $\mathcal{R}$ indépendamment de i. Il en résulte que pour tous u,v de L : $\widehat{uv} = \hat{u}\, v = u\, \hat{v}$: L est donc un binaire à involution (IX. 7) et X se plonge canoniquement dans L comme ensemble à involution.

Théorème : L est le binaire à involution libre pour l'ensemble à involution X.

Preuve : Soit θ un morphisme de $(X , \wedge)$ dans le binaire à involution B. Il existe un morphisme ψ de binaire de L dans B qui prolonge l'application θ.
Si $a \mathcal{R} b$ alors θ respectant $\wedge$ et B vérifiant K_4 , $(a)\psi = (b)\psi$ donc il existe un morphisme ξ de binaire de $\hat{L}$ dans B qui prolonge θ.
Enfin ξ respecte $\wedge$ sur $\hat{L}$.

La même construction à partir de D (resp. C) permet d'obtenir $\hat{D}$ (resp. $\hat{C}$) demi-groupe (resp. —— commutatif) à involution libre pour l'ensemble à involution X.
On peut aussi obtenir $\hat{D}$ (resp. $\hat{C}$) à partir de $\hat{L}$ comme on a obtenu D (resp. C) à partir de L.

Soit X un ensemble, X' une copie (disjointe) de X et $Y = X \cup X'$. Y est canoniquement muni de l'involution : $x \longleftrightarrow x'$.

Proposition : Le binaire à involution libre pour l'ensemble X est le binaire à involution libre pour l'ensemble à involution $Y = X \cup X'$.

Preuve : Soit θ une application de X dans un binaire à involution B.
θ s'étend à Y par : $(x')\,\theta = (x)\,\theta$.
On applique le théorème.

Références pour le chapitre IX

1 A. Batbedat : Demi-groupes gauches.

2 A. Batbedat : Systèmes opératifs.

3 R.H. Bruck : A survey of binary systems. Springer-Verlag (1958).

4 A.H. Clifford et G.B. Preston : The algebraic theory of semi-groups. Mathematical Surveys n° 7 (1961 et 1967).

5 H. Hashimoto : On a generalization of groups. Proc. Japan Acad. n° 30 (1954).

X. 1

Ω est un anneau d'unité 1 et de zéro ω.

Définition 1 : E est une Ω-préalgèbre si :

i) E est un strict Ω-espace affine (III) pour l'opération affine : (a,b,ε,c).

ii) E est un binaire (IX) pour le produit : ab .

iii) Par le produit à gauche et aussi à droite E opère sur le strict Ω-espace affine E.

La propriété iii) s'écrit :
$(a,b,\varepsilon,c)d = (ad,bd,\varepsilon,cd)$ et $d(a,b,\varepsilon,c) = (da,db,\varepsilon,dc)$.
On l'appelle distributivité.

Définition 2 : E est un préanneau si c'est une Z-préalgèbre.

On sait que l'opération affine d'un strict Z-espace affine est déterminée par la loi ternaire : $a-b+c$, pour le strict groupe ternaire sous-jacent. Ainsi :

Lemme 1 : E est un préanneau si et seulement si :

i) E est un strict groupe ternaire pour $a-b+c$.

ii) E est un binaire pour ab .

iii) Le produit est distributif par rapport à la loi ternaire.

Si E est une Ω-préalgèbre, E est un strict groupe ternaire pour :
$a-b+c = (a,b,1,c)$ d'où :

Lemme 2 : Toute Ω-préalgèbre est un préanneau.

Un morphisme θ de Ω-préalgèbres respecte l'opération affine et le produit ; il vérifie donc :
$(a,b,\varepsilon,c)\,\theta = ((a)\,\theta, (b)\,\theta, \varepsilon, (c)\,\theta)$ et $(ab)\,\theta = (a)\,\theta\,(b)\,\theta$.
Un morphisme de préanneau est caractérisé par :
$(a-b+c)\,\theta = (a)\,\theta - (b)\,\theta + (c)\,\theta$ et $(ab)\,\theta = (a)\,\theta\,(b)\,\theta$.

Pour un préanneau on conserve généralement les qualificatifs attribués à certaines propriétés du binaire sous-jacent telles que : bon à droite, associatif,

commutatif, unitaire, idempotent etc. Pour dominant, simplifiable (on dit encore intègre), on admet l'exception du zéro éventuel.
Soit E un préanneau : lorsque tout élément de E, à l'exception du zéro éventuel, est inversible (resp. d-inversible) E est un précorps (resp. d-précorps).

La notion de caractéristique pour un préanneau est, elle, directement rattachée au strict groupe ternaire sous-jacent : on sait (V. 1 Définition) que ce dernier est de caractéristique n si c'est un Z/n-espace affine.
On définit, comme en III. 5, l'expression : "le préanneau E est une Ω-préalgèbre", le produit restant, ici, le même ; ceci étant on voit que :

Proposition : Un préanneau est de caractéristique n si et seulement si c'est une Z/n-préalgèbre.

X. 2

Compte tenu de X. 1 Lemme 1 et de II. 9, on voit que les notions de préanneau au sens de P. Janin [JP] et de préanneau associatif au sens de X. 1 sont équivalentes.
Le lien entre notre définition des préalgèbres et celle de [JP] est plus délicat à établir ; nous le ferons en fin de paragraphe.

Soit (A, +, .) un anneau et $k \in A$; l'involution $x \to (k-x)$ permet, par transport de structure, de munir A des nouvelles lois :

$$a \oplus b = a - k + b$$
$$a \otimes b = ak + kb - ab - k^2 + k \quad ,$$

qui en font un anneau isomorphe à l'anneau initial.

Soit maintenant P un préanneau et $k \in P$: il est immédiat que sur P les opérations $\oplus$ et $\otimes$ précédentes ont un sens ; elles font de P un anneau de zéro k (appelé dans [JP] : anneau transformé du préanneau P par l'élément k).
Si P est associatif (resp. commutatif) alors le produit $\otimes$ est associatif (resp. commutatif).
La loi $\oplus$ précédente est celle du groupe binaire P_k associé au strict groupe ternaire P (I. 11 Notation 2).
Si, de plus, P est une Ω-préalgèbre, P_k est (III. 3 Lemme 1) un Ω-module pour la loi externe : $a * \varepsilon = (a,k,\varepsilon,k)$; d'autre part on vérifie que :

$(a * \varepsilon) \otimes b = a \otimes (b * \varepsilon) = (a \otimes b) * \varepsilon$, ce qui montre que P_k est une Ω-algèbre.

Soit T le Ω-module des translations du strict Ω-espace affine P ; on sait que l'application : $a \in P_k \to \mathscr{C}_{ka} \in T$, est un isomorphisme de Ω-modules, ce qui permet, par transport de structure, de munir T d'une structure de Ω-algèbre isomorphe à P_k .
Ce produit sur T, noté $\times$, est déterminé par :

$$\mathscr{C}_{ka} \times \mathscr{C}_{kb} = \mathscr{C}_{kc} \quad \text{avec} \quad c = a \otimes b \ .$$

Si $\mathscr{C}_{xy} = \mathscr{C}_{ka}$ et $\mathscr{C}_{zt} = \mathscr{C}_{kb}$, alors en remplaçant a par (k-x+y) et b par (k-z+t) on obtient $c = (k-u+v)$ avec $u = xz - xt + yt$ et $v = yz$.
On a donc : $\mathscr{C}_{xy} \times \mathscr{C}_{zt} = \mathscr{C}_{uv}$ d'où il résulte que ce produit sur T est indépendant de k ; par conséquent, quels que soient h et k dans P, les Ω-algèbres P_h et P_k sont isomorphes.
D'autre part on peut énoncer le :

Théorème 1 : L'ensemble des translations d'une Ω-préalgèbre est canoniquement une Ω-algèbre.

Notons PAΩ la catégorie suivante :
Un objet de PAΩ est un couple (A,V) où A est un ensemble et V une Ω-algèbre avec une application : $(a,v) \in A \times V \to a \circledcirc v \in A$, vérifiant :
i) $(a \circledcirc v) \circledcirc v' = a \circledcirc (v \oplus v')$.
ii) Pour tous a,b de A il existe un unique $v \in V$ tel que : $a \circledcirc v = b$.
Un morphisme de (A,V) dans (A',V') est un couple (ψ , ϕ) où ψ est une application de A dans A' et ϕ un morphisme de Ω-algèbres de V dans V' tels que : $(a \circledcirc v)\psi = (a)\psi \circledcirc (v)\phi$.

Soient des catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et un foncteur $\Phi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$.
Notons $\Phi(O_1, O_2)$ l'application qui à un morphisme de $\mathscr{C}$ de O_1 vers O_2 associe son image par Φ dans $\mathscr{C}'$. On dit que Φ est fidèle (resp. plein) si pour tous les couples (O_1, O_2) de $\mathscr{C}$, $\Phi(O_1, O_2)$ est injective (resp. surjective).

Exemple : Comme un Ω-module est une Ω-algèbre pour le produit nul $(ab = O)$, on montre facilement qu'il existe un foncteur fidèle et plein de Aff_Ω (VII. 9) vers PAΩ .
Par contre, le foncteur oubli de PAΩ dans Aff_Ω n'est ni fidèle ni plein.

On note $Préalg_\Omega$ la catégorie des Ω-préalgèbres.
Soit E une Ω-préalgèbre et T la Ω-algèbre des translations de E (théorème 1) : (E, T) muni de l'action de T sur E, est un objet de PAΩ. Soit prime un morphisme de $Préalg_\Omega$, de E dans F, et μ l'application linéaire que lui associe la preuve de VII. 9 Lemme 2 : $(\mathscr{C}_{ka} \times \mathscr{C}_{kb})\,\mu = (\mathscr{C}_{kc})\,\mu = \mathscr{C}_{k'c'}$; or $c' = a' \otimes b'$, (produit dans $F_{k'}$) puisque prime est un morphisme de Ω-préalgèbres ; donc : $(\mathscr{C}_{ka} \times \mathscr{C}_{kb})\,\mu = \mathscr{C}_{k'a'} \times \mathscr{C}_{k'b'} = (\mathscr{C}_{ka})\,\mu \times (\mathscr{C}_{kb})\,\mu$, et μ est un morphisme de Ω-algèbres.
Le couple Φ de fonctions, qui à E associe (E, T) et à prime associe (prime, μ), est un foncteur de $Préalg_\Omega$ dans PAΩ ; il est immédiat que Φ est fidèle. Ainsi :

Théorème 2 : Il existe un foncteur fidèle de $Préalg_\Omega$ dans PAΩ .

Soit E et E' des Ω-préalgèbres, (E, T) et (E', T') leurs images par Φ et (ψ, ϕ) un morphisme de PAΩ de (E, T) vers (E', T') : la preuve de VII. 9 Lemme 1 montre que ψ est une application affine de E vers E' ; on peut affirmer que Φ est plein si l'on prouve que Ψ respecte le produit dans E.
La question de savoir si les catégories $Préalg_\Omega$ et PAΩ sont équivalentes est, elle aussi, liée aux relations entre le produit sur E et le produit sur T.
Nous posons ici ce problème en remarquant que :
Si les catégories $Préalg_\Omega$ et PAΩ sont équivalentes, nous obtenons une nouvelle caractérisation des préalgèbres.
Sinon, la catégorie PAΩ offre un champ de recherches plus vaste que celui des préalgèbres.

En [JP] proposition 17, est introduit l'anneau P^2/S associé à un préanneau P.

Lemme 1 : Soit P un préanneau :
L'anneau P^2/S est isomorphe aux anneaux T et P_k .

Preuve : Les applications : $(\overline{x,y}) \in P^2/S \to \mathscr{C}_{xy} \in T \to (y \ominus x) \in P_k$ sont des isomorphismes.

Dans [JP] , au chapitre II, P. Janin appelle préalgèbre sur l'anneau (associatif) commutatif, unitaire, Ω, un préanneau P dont l'anneau associé P^2/S est une Ω-algèbre pour laquelle les actions canoniques de P à droite et à gauche :

$((\overline{x,y})\ ,\ p) \to (\overline{xp\ ,\ yp})$ et $(p\ ,\ (\overline{x,y})) \to (\overline{px\ ,\ py})$,
sont permutables avec l'action de Ω.
Soit P un préanneau et $k \in P$: on transporte la structure de P^2/S sur P_k par la bijection de la preuve du lemme 1 ; alors :

Lemme 2 : L'action canonique à droite de P sur P^2/S correspond sur P_k à :
$a \otimes p = ap \ominus kp$.

Proposition 1 : Une Ω-préalgèbre associative P au sens de X. 1 est une préalgèbre sur Ω au sens de P. Janin [JP].

Preuve : P étant un préanneau et P_k une Ω-algèbre, il reste à vérifier les conditions de permutabilité :

$$(a \circledast p) * \varepsilon = (ap - kp + k\ ,\ k\ ,\ \varepsilon\ ,\ k)$$
$$= (ap\ ,\ kp\ ,\ \varepsilon\ ,\ k)$$
$$= (a,\ k,\ \varepsilon,\ k)\ p \ominus kp$$
$$= (a * \varepsilon) \circledast p \quad .$$

De même à gauche.

Proposition 2 : Une préalgèbre sur l'anneau Ω, au sens de P. Janin [JP] est une Ω-préalgèbre associative, au sens de X. 1.

Preuve : Par hypothèse P_k est un Ω-module donc P est un strict Ω-espace affine ; P étant déjà un préanneau avec la même loi ternaire sous-jacente, il reste à vérifier la distributivité du produit pour cette opération affine :
par hypothèse $(a \circledast p) * \varepsilon = (a * \varepsilon) \circledast p$, d'où on tire (lemme 2)
$(ap) * \varepsilon = (a * \varepsilon)p - kp + (kp) * \varepsilon$
alors $(ap,\ bp,\ \varepsilon,\ cp) = (ap) * \varepsilon - (bp) * \varepsilon + cp$
$$= (a * \varepsilon)p - (b * \varepsilon)p + cp$$
$$= (a,\ b,\ \varepsilon,\ c)p$$

De même à gauche.

On remarquera que cette démonstration a été faite sans utiliser la structure de Ω-algèbre de P_k ; ainsi la définition 27 de [JP] est redondante.

Pour terminer ce paragraphe nous posons le problème plus général d'un préanneau dont l'anneau associé est une Ω-algèbre (sans autre condition)... Le problème

analogue pour un strict Ω-espace affine dont le Ω-module associé est une Ω-algèbre, rejoint la question de l'équivalence des catégories $\mathrm{Préalg}_\Omega$ et $\mathrm{PA}\Omega$.

X. 3

Définition : Soit E une Ω-préalgèbre avec une involution $\wedge$. E est une Ω-préalgèbre à involution $\wedge$ si :

K_3 : $\widehat{(a, b, \varepsilon, c)} = (\hat{a}, \hat{b}, \varepsilon, \hat{c})$

K_4 : $\widehat{ab} = \hat{a}\, b = a\, \hat{b}$.

Soit E une Ω-préalgèbre à involution $\wedge$: E muni du produit est un binaire à involution $\wedge$ (IX. 6) ; E muni de l'opération affine : (a, b, ε, c) est un Ω-espace affine régulier (III. 5). Par une adaptation aisée de III. 7 Théorème, on obtient :

Théorème : La catégorie des Ω-préalgèbres à involution est équivalente à la catégorie des Ω-espaces affines réguliers avec un produit distributif.

Un préanneau à involution est une Z-préalgèbre à involution ; c'est donc un préanneau avec une involution vérifiant :

K_4 et K_1 : $\widehat{a - b + c} = \hat{a} - \hat{b} + \hat{c}$.

Corollaire : La catégorie des préanneaux à involution est équivalente à la catégorie des groupes ternaires m-commutatifs avec un produit distributif.

En particulier un Ω-espace affine (non nécessairement régulier) avec un produit distributif est une Ω-préalgèbre et un préanneau à involution.

Compte tenu de II. 3 Théorème, un préanneau associatif à involution peut être défini par les axiomes de [JP] définition 1, avec pour seule modification le remplacement de l'axiome 1, d) par le suivant :

La loi ternaire étant notée : $a \perp b + c$, pour tout a il existe b tel que $a \perp b + a = a$.

Soit E une Ω-préalgèbre à involution : on a vu (IX. 7 Proposition 3) que si le binaire E est quasi-unitaire alors l'involution s'exprime par la loi binaire.

Proposition 1 : Soit E une Ω-préalgèbre :

Si E est un préanneau à involution et le binaire sous-jacent est quasi-unitaire alors E est une Ω-préalgèbre à involution.

Preuve : L'involution s'exprimant par la loi binaire, K_3 résulte de la distributivité du produit pour l'opération affine.

Corollaire : Soit E un Ω-espace affine avec un produit distributif.

Si le binaire E est quasi-unitaire, alors le Ω-espace affine E est régulier.

Soit A une Ω-algèbre et $\wedge$ une involution sur A : A est un anneau à involution si $\wedge$ vérifie K_4 et : $\widehat{a \oplus b} = \hat{a} \oplus \hat{b}$; c'est une Ω-algèbre à involution si de plus : $\widehat{a\,\varepsilon} = \hat{a}\,\varepsilon$ (c'est K_2 pour l'opérateur Ω).

Proposition 2 : Si A est un anneau intègre à involution $\wedge$, $\wedge$ est ou bien l'identité ou bien l'application : $a \to \ominus a$.

Preuve : $\hat{a}^2 = a^2$ (IX. 7 Proposition 2) implique pour chaque a : $\hat{a} = a$ ou $\hat{a} = \ominus a$.
Supposons que $\wedge$ soit autre que l'identité ou : $a \to \ominus a$: alors il existe a et b tels que : $\hat{a} = a \neq \ominus a$ et $\hat{b} = \ominus b \neq b$; ceci implique : $\widehat{a \oplus b} = \hat{a} \oplus \hat{b} = a \ominus b$ et donc : $a \ominus b = a \oplus b$ ou $a \ominus b = \ominus a \ominus b$ c'est-à-dire : $b = \ominus b$ ou $a = \ominus a$, ce qui est absurde.

Proposition 3 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Anneau (resp. Ω-algèbre) à involution.

ii) Préanneau (resp. Ω-préalgèbre) à involution et avec zéro.

Preuve : ii) implique i) parce que l'involution est fixe sur le zéro (IX. 7, Proposition 1).

X. 4

Soit E un Ω-espace pondéré (VII. 1) avec un produit : ab , pour lequel E opère à gauche et aussi à droite sur le Ω-espace pondéré E, ce qui s'écrit :
$(\Sigma\, a_i\, \alpha_i)\, d = \Sigma\, (a_i\, d)\, \alpha_i$ et $d(\Sigma\, a_i\, \alpha_i) = \Sigma\, (d\, a_i)\, \alpha_i$
On dit encore que le produit est distributif par rapport à la loi pondérée.

Compte tenu de VII. 2, Proposition 1 et VII. 3, Proposition :

Proposition : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Ω-espace pondéré avec un produit distributif.

ii) Ω-préalgèbre.

Lemme 1 (distributivité généralisée) : Soit E une Ω-préalgèbre :

$$(\Sigma\ a_i\ \alpha_i)\ (\Sigma\ b_j\ \beta_j) = \Sigma\ (a_i\ b_j)\ (\alpha_i\ \beta_j)\ .$$

Preuve : On applique la distributivité et on vérifie B_1 (VII. 1).

Lemme 2 : Une Ω-préalgèbre à involution $\wedge$ est un Ω-espace pondéré avec un produit distributif et vérifiant :

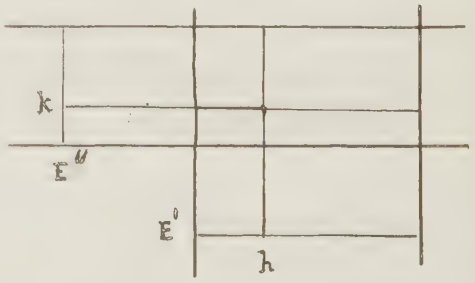
K_4 et K_5 : $\overbrace{\Sigma\ a_i\ \alpha_i} = \Sigma\ \hat{a}_i\ \alpha_i$.

X. 5

Les généralités de VI. 1 sur les sous-espaces s'appliquent ici à la notion de sous-préalgèbre (resp. ——— à involution).
Si une sous-prealgèbre possède un neutre (resp. un zéro) pour elle-même, c'est une sous-préalgèbre unitaire (resp. sous-algèbre).
La définition d'un idéal est celle de VI. 5 à condition de préciser : à droite, à gauche, ou bilatère. Un idéal bilatère est une sous-préalgèbre.
On définit de manière classique le produit d'une famille de Ω-préalgèbres ; c'est une Ω-préalgèbre.

Soit E, Ω-préalgèbre produit des Ω-préalgèbres E' et E'' , $h \in E'$ et $k \in E''$.

Le Ω-module $E_{(h,k)}$ est somme directe des Ω-modules E'_h et E''_k .



Soit F' (resp. F'') l'image canonique de E' (resp. E'') ensemble des (a,k) (resp. (h,b)).

Le produit d'un élément de F' par un élément de F'' s'écrit :
$(a,k)\ (h,b) = (ah,\ kb) = (ah,\ k) \oplus (h,\ kb)$.

F' (resp. F'') est stable par le produit dans E, c'est-à-dire est une sous-préalgèbre, si et seulement si k (resp. h) est idempotent dans E'' (resp. E'). Alors (j,k) est idempotent dans E.

Nous trouvons une situation analogue dans la :

Proposition : Soit E une Ω-préalgèbre, k idempotent dans E et ε idempotent central dans Ω :
$E_k * \varepsilon$ et $E_k * (1 \dot{-} \varepsilon)$ sont des sous-préalgèbres et E est leur produit.

Preuve : E_k est somme directe des sous-modules $E_k * \varepsilon$ et $E_k * (1 \dot{-} \varepsilon)$.
Dans le Ω-espace pondéré E : $x * \varepsilon = x\varepsilon + k(1 \dot{-} \varepsilon)$,
donc : $(x * \varepsilon)(y * \varepsilon) = (x\varepsilon + k(1 \dot{-} \varepsilon))\,(y\varepsilon + k(1 \dot{-} \varepsilon))$
$= (xy)\varepsilon + k(1 \dot{-} \varepsilon)$ (distributivité généralisée)
$= (xy) * \varepsilon$.

X. 6

Soit E un préanneau ; comme dans [JP] , on note : $a \vee b$ la loi binaire : $a \vee b = a + b - ab$ (appelée disjonction).
P. Janin a montré que E est encore un préanneau (le dual pour la disjonction) lorsqu'on remplace le produit initial par $\vee$.

Définition : Soit E une Ω-préalgèbre, α, β, γ dans Ω avec :
$\alpha + \beta + \gamma = 1$.
La loi binaire : $a \times b = a\alpha + b\beta + (ab)\gamma$ est dite déduite par la construction pondérée.
Lorsque ce nouveau produit $\times$ est distributif pour l'opération affine initiale, on obtient une Ω-préalgèbre dite déduite de E par la construction pondérée.

Lemme 1 : Avec les notations précédentes, lorsque α, β, γ sont dans le centre de Ω, la loi binaire $\times$ est distributive.

Lorsque α, β (et donc γ) sont centraux, le strict Ω-espace affine E muni du nouveau produit $\times$ est une Ω-préalgèbre déduite de E par la construction pondérée.

Si Ω est commutatif, à chaque loi binaire $\times$ déduite par la construction pondérée sur E, correspond une Ω-préalgèbre.

On dira que la Ω-préalgèbre E est fidèle s'il en est ainsi du strict Ω-espace affine E (III. 8). On voit que :

Lemme 2 : La Ω-préalgèbre E est une Ω-préalgèbre fidèle sur l'anneau associatif : $\Omega' = \Omega/_{\mathrm{Ann}(E)}$.

Pour simplifier, on peut supposer Ω associatif et E fidèle ; il est facile ensuite d'oublier ces hypothèses : les résultats qui concernent uniquement E demeurent généralement valables.

Soit L' l'ensemble des triplets (α, β, γ) d'éléments de Ω avec :
$\alpha \dot{+} \beta \dot{+} \gamma = 1$.
Par : $(\alpha, \beta, \gamma)(\alpha', \beta', \gamma') = (\alpha' \dot{+} \alpha\gamma', \beta' \dot{+} \beta\gamma', \gamma\gamma')$, on définit une loi binaire sur L' puisque : $\alpha' \dot{+} \beta' \dot{+} (\alpha \dot{+} \beta \dot{+} \gamma)\gamma' = 1$.
$(\omega, \omega, 1)$ est neutre et $(1, 1, \dot{-}1)$ involutif ; (α, β, γ) est zéro à droite si et seulement si $\gamma = \omega$.
Soit $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in L'$ et γ' tel que (γ, γ') vérifie I_1 (IX. 3) dans Ω : $u' = (\dot{-}\alpha\beta', \dot{-}\beta\gamma', \gamma')$ est dans L' puisque : $(\dot{-}\alpha \dot{-} \beta \dot{+} 1)\gamma' = \gamma\gamma' = 1$; on vérifie que le couple (u,u') vérifie I_1.

Lemme 3 : Si Ω est associatif, L' est un demi-groupe.

Ω étant associatif, (α, β, γ) est inversible à droite (resp. à gauche) si et seulement si γ est inversible à droite (resp. à gauche).

Proposition : Soit E une Ω-préalgèbre :
L'ensemble L des lois binaires déduites par la construction pondérée est canoniquement un demi-groupe unitaire quotient du binaire L'.
L'ensemble L_1 des lois binaires distributives est un sous-demi-groupe de L.

Preuve : Soit λ l'application surjective de L' sur L qui à (α, β, γ) associe la loi binaire : $a \times b = a\alpha + b\beta + (ab)\gamma$.
L'image du composé : $(\alpha' \dot{+} \alpha\gamma', \beta' \dot{+} \beta\gamma', \gamma\gamma')$ est :

$a\,\alpha' + b\,\beta' + (a\,\alpha + b\,\beta + (ab)\,\gamma)\,\gamma' = a\,\alpha' + b\,\beta' + (a \times b)\,\gamma'$.
Cette loi binaire ne dépendant que des deux lois images $\times$ et $\times'$ détermine sur L' une congruence pour laquelle L est le quotient de L'. On peut, sans restreindre la généralité, se placer dans les conditions du lemme 3.
Si $\times$ et $\times'$ sont distributives $\times\,\times'$ est distributive puisque c'est la loi binaire $\times'$ déduite par la construction pondérée du produit $\times$.

On définit une action de Ω sur le binaire L', que l'on appelle projection : la projection de (α, β, γ) par ε est :
$(\alpha', \beta', \gamma') = (\alpha\,\varepsilon, \beta\,\varepsilon, 1 \dot{-} \varepsilon \dot{+} \gamma\,\varepsilon) \in L'$.
On voit que cette action de Ω sur L' est compatible avec λ ce qui permet de définir canoniquement une action de Ω sur L encore appelée projection : la projection par ε de la loi binaire $\times$ est : $(a \times b)\,\varepsilon + (ab)\,(1 \dot{-} \varepsilon)$. On note π_ε cette transformation.

Lemme 4 : Lorsque ε est dans le centre de Ω, L_1 est stable par π_ε .

Lemme 5 : Si ε est idempotent et commute avec γ' :
$(\times\,\times')\,\pi_\varepsilon = (\times)\,\pi_\varepsilon\ (\times')\,\pi_\varepsilon$.

Preuve : $(\times\,\times')\,\pi_\varepsilon = (a\,\alpha' + b\,\beta' + (a \times b)\,\gamma')\,\varepsilon + (ab)\,(1 \dot{-} \varepsilon)$
$(\times)\,\pi_\varepsilon\ (\times')\,\pi_\varepsilon = a\,\alpha' + b\,\beta' + ((a \times b)\,\varepsilon + (ab)\,(1 \dot{-} \varepsilon))\,\gamma')\,\varepsilon$
$+ ((a \times b)\,\varepsilon + (ab)\,(1 \dot{-} \varepsilon))\,(1 \dot{-} \varepsilon)$.
Comme $(1 \dot{-} \varepsilon)$ est idempotent orthogonal à ε et $\gamma'\,\varepsilon = \varepsilon\,\gamma'$, l'égalité en résulte.

Lemme 6 : Soit ε idempotent et commutant avec γ' :
Si $\times'$ est inverse à droite pour $\times$ alors $(\times')\,\pi_\varepsilon$ est inverse à droite pour $(\times)\,\pi_\varepsilon$.

Preuve : Le produit initial : ab est invariant par π_ε ; on applique le Lemme 5.

Lemme 7 : La loi binaire : $a \times b$ est projection de la disjonction par $\varepsilon \in \Omega$ si et seulement si elle peut s'écrire :
$a \times b = a\,\varepsilon + b\,\varepsilon + (ab)\,(1 \dot{-} 2\,\varepsilon)$.

X. 7

Soit E une Ω-préalgèbre, $k \in E$ et ε un idempotent central de Ω : le Ω-module E_k est somme directe des Ω-modules : $E_k * \varepsilon$ et $E_k * (1 \dot{-} \varepsilon)$.
Une loi binaire $\times'$ projection de $\times$ par ε s'exprime ici par les composantes canoniques :

$$a \times' b = (a \times b) * \varepsilon \oplus (ab) * (1 \dot{-} \varepsilon).$$

Supposons de plus k idempotent dans E : par X. 5 Proposition, $E_k * (1 \dot{-} \varepsilon)$ est une sous-algèbre de E que nous notons E''.
Ajoutons l'hypothèse : $\times$ est distributive ; alors E est une Ω-préalgèbre avec le produit $\times$ et k est encore idempotent donc $E_k * \varepsilon$ est une sous-préalgèbre que nous notons E'. Le produit de E' par E'' est nécessairement le strict Ω-espace affine E avec le produit :
$(a * \varepsilon) \times (b * \varepsilon) \oplus (a * (1 \dot{-} \varepsilon))\ (b * (1 \dot{-} \varepsilon))$ ou encore,

$$(a \times b)\ \varepsilon \oplus (ab)\ (1 \dot{-} \varepsilon)$$

c'est-à-dire $\times' = (\times)\ \pi_\varepsilon$.
On établit aisément la réciproque compte tenu de X. 6 Lemme 4.
Ainsi :

Proposition 1 : Soit E une Ω-préalgèbre, k idempotent dans E, ε idempotent central dans Ω et $\times \in L_1$; les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) La loi binaire $\times'$ est projection de $\times$ par ε .
ii) $\times' \in L_1$; la Ω-préalgèbre E pour la loi binaire $\times'$ est le produit de la sous-préalgèbre $E_k * \varepsilon$ pour le produit $\times$, par la sous-préalgèbre $E_k * (1 \dot{-} \varepsilon)$ pour le produit initial.

Si k est zéro à droite dans E' et E'', il est zéro à droite dans leur produit.

Proposition 2 : Soit E une Ω-préalgèbre, $k \in E$, ε idempotent central dans Ω et $\times$ inversible à droite dans L_1 ; les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) k est zéro à droite pour : $\times' = (\times)\ \pi_\varepsilon$.
ii) k est idempotent ; il est zéro à droite dans les sous-préalgèbres : $E_k * \varepsilon$ pour le produit $\times$ et $E_k * (1 \dot{-} \varepsilon)$ pour le produit initial.

Preuve : i) implique ii) : Par X. 6, Lemme 6, $\times'$ est aussi inversible à droite donc il existe α, β, γ : $ab = a\alpha + b\beta + (a \times' b)\gamma$, soit : $ak = a\alpha + k(1 \dot{-} \alpha)$, alors k est idempotent.

De : $a \times' k = (a \times b)\varepsilon + (ak)(1 \dot{-} \varepsilon)$, on tire :

$$k = k * \varepsilon = (a \times k) * \varepsilon = (a * \varepsilon) \times k$$

$$k = k * (1 \dot{-} \varepsilon) = (ak) * (1 \dot{-} \varepsilon) = (a * (1 \dot{-} \varepsilon))\, k \quad .$$

Avec les mêmes hypothèses on a l'équivalence pour zéro à gauche.

Définition : Soit E une Ω-préalgèbre : E est une Ω-algèbre camouflée s'il existe une Ω-algèbre dans la classe des Ω-préalgèbres déduites de E par la construction pondérée (X. 6. Définition).

Ce qualificatif a été utilisé de manière analogue dans [JP] pour les cas de la Ω-préalgèbre initiale et de la Ω-préalgèbre avec la disjonction.

E est une Ω-algèbre camouflée si et seulement si il existe (α, β, γ) dans l'image réciproque de L_1 par λ et $k \in E$ (le zéro camouflé) tels que pour tout $a \in E$:

$$k = a\alpha + k\beta + (ak)\gamma = k\alpha + a\beta + (ka)\gamma \ .$$

Par X. 6, Lemme 1 on obtient la condition suffisante :

Proposition 3 : Soit E une Ω-préalgèbre ; s'il existe $k \in E$ et α, β, γ dans le centre de Ω avec $\alpha \dot{+} \beta \dot{+} \gamma = 1$, tels que pour tout $a \in E$: $k = a\alpha + k\beta + (ak)\gamma = k\alpha + a\beta + (ka)\gamma$, alors E est une Ω-algèbre camouflée.

Soit E une Ω-algèbre, k son zéro et $\times \in L_1$: si $\times$ est inversible à droite, k est un zéro camouflé pour la Ω préalgèbre avec le produit $\times$.

X. 8

Définition : Deux structures de Ω-préalgèbre sur le même strict Ω-espace affine sont duales si l'on peut passer de l'une à l'autre par une construction pondérée qui conserve la commutativité et l'associativité éventuelles.

"Chassez la disjonction, elle revient au galop !", comme le montre le :

Théorème : Soit E une Ω-préalgèbre fidèle et $\times$ un produit distributif déduit par la construction pondérée ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le produit $\times$ est dual du produit initial.

ii) Le produit $\times$ est projection de la disjonction par un idempotent de Ω.

Preuve : i) implique ii) : Le produit $a \times b = a\,\alpha + b\,\beta + (ab)\,\gamma$ conserve la commutativité si pour tous a,b de E, dans le Ω-module E_k :

$a * \alpha \oplus b * \beta = b * \alpha \oplus a * \beta$

ce qui, avec $b = k$, implique :

$a * \alpha = a * \beta$ pour tout $a \in E$

ou, puisque E est fidèle : $\alpha = \beta$.

Alors : $a \times b = a\,\alpha + b\,\alpha + (ab)\,(1 \dot{-} 2\,\alpha)$ est projection de la disjonction par $\alpha \in \Omega$ (X. 6, Lemme 7).

Il en résulte que la loi binaire $\times$ conserve l'associativité éventuelle si pour tous a, c de E :

$a * \alpha^2 \oplus c * \alpha = a * \alpha \oplus c * \alpha^2$

ce qui, avec $c = k$, et E fidèle, implique : $\alpha^2 = \alpha$.

ii) implique i) : $a \times b = (a \vee b)\,\varepsilon + (ab)\,(1 \dot{-} \varepsilon)$ conserve la commutativité et l'associativité éventuelles.

Il est involutif comme l'est la disjonction (X. 6, Lemme 6).

On voit par cette preuve que l'on peut oublier l'hypothèse : "fidèle", en remplaçant : "α est idempotent" par :

"$a * \alpha^2 = a * \alpha$ pour tout $a \in E$".

X. 9

On note L'_o l'ensemble des zéros à droite du binaire L' de X. 6.

L'_o est un sous-demi-groupe zéro à droite (IX. 1) de L' et l'application :

$\alpha \in \Omega \to (\alpha, (1 \dot{-} \alpha), \omega) \in L'_o$ est une bijection.

L'image par λ d'un élément de L'_o est la loi binaire :

$a \times b = a\,\alpha + b\,(1 \dot{-} \alpha)$.

Elle ne dépend en fait que du strict Ω-espace affine sous-jacent.

Plus généralement :

Définition : Soit (E,k) un strict Ω-espace affine E pointé en k.
La loi binaire : $a \times b = a\alpha + b\beta + k\gamma$ avec $\alpha \dot{+} \beta \dot{+} \gamma = 1$ dans Ω, est dite déduite par la construction pondérée.

Proposition 1 : Soit E un strict Ω-espace affine fidèle. La loi binaire : $a \times b = a\alpha + b\beta + k\gamma$ est distributive si et seulement si α et β sont centraux.

Preuve : Condition nécessaire : Si E opère par le produit à droite $a * (\varepsilon\alpha) \ominus b * (\varepsilon\alpha) = a *(\alpha\varepsilon) \ominus b * (\alpha\varepsilon)$, soit avec $b = k$: $a * (\varepsilon\alpha) = a * (\alpha\varepsilon)$ pour tout $a \in E$ donc $\varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon$ puisque E est fidèle. De même à gauche avec β.

Condition suffisante : Nous allons voir que l'on peut appliquer X. 6, Lemme 1.

Appelons produit nul sur le strict Ω-espace affine pointé (E, k) la loi binaire : $ab = k$. Ce produit étant distributif, E devient une Ω-algèbre, commutative et associative que l'on qualifie de nulle. Ainsi on peut appliquer les résultats de X. 6, 7 et 8.

On appellera naturellement disjonction nulle la loi binaire :
$$a \vee b = a + b - k .$$

Proposition 2 : Tout strict Ω-espace affine pointé (E, k) est canoniquement un précorps commutatif associatif et unitaire.

Preuve : E muni de la disjonction nulle est isomorphe au groupe binaire commutatif E_k.

Par X. 8, théorème lorsque E est fidèle, tout produit dual du produit nul est projection de la disjonction nulle par un idempotent α, c'est-à-dire est de la forme : $a \times b = a\alpha + b\alpha + k(1 \dot{-} 2\alpha)$; mais (proposition 1) α est nécessairement central ce qui permet d'appliquer X. 7, Proposition 1.
Par conséquent :

Proposition 3 : Soit (E, k) un strict Ω-espace affine fidèle pointé considéré comme Ω-algèbre nulle.
Toute Ω-préalgèbre duale de E est produit d'un sous-précorps pour la disjonction nulle par une sous-algèbre nulle.

Etudions maintenant quelques propriétés de la loi $\times$ de définition, loi binaire qui dans E_k s'écrit : $a \times b = a * \alpha \oplus b * \beta$.

Proposition 4 : Soit E un strict Ω-espace affine fidèle pointé en k et $\times$ une loi binaire déduite par la construction pondérée :
i) $\times$ est commutative si et seulement si : $\alpha = \beta$.
ii) $\times$ est associative si et seulement si : $\alpha^2 = \alpha$; $\alpha \beta = \beta \alpha$; $\beta^2 = \beta$.
iii) Il existe un zéro à gauche si et seulement si : $\beta = \omega$.
iv) Il existe un neutre à droite si et seulement si : $\alpha = 1$.

Preuve : i) Preuve de X. 8, Théorème.

ii) Condition nécessaire : On doit avoir pour tous a, b, c : $a * \alpha^2 \oplus b * \beta \alpha \oplus c * \beta = a * \alpha \oplus b * \alpha \beta \oplus c * \beta^2$ soit, avec $b = c = k$: $a * \alpha^2 = a * \alpha$, ce qui implique $\alpha^2 = \alpha$ puisque E est fidèle.
De même pour les autres égalités.

iii) Condition nécessaire : Soit e zéro à gauche :
$e = e \times a = e * \alpha \oplus a * \beta$, implique avec $a = k$: $e = e * \alpha$ c'est-à-dire : $a * \beta = k$ pour tout $a \in E$ et donc : $\beta = \omega$.

Condition suffisante : Si $\beta = \omega$, k est zéro à gauche.

iv) Condition nécessaire : Soit e neutre à droite :
$a = a \times e = a * \alpha \oplus e * \beta$, d'où avec $a = k$ $e * \beta = k$ et donc $a = a * \alpha$ pour tout $a \in E$ c'est-à-dire : $\alpha = 1$.

Condition suffisante : Si $\alpha = 1$, k est neutre à droite.

Pour i), iii) ou iv) on peut oublier l'hypothèse "fidèle" en ne retenant que les effets pour la loi $\times$ (et non les propriétés sur Ω) : ainsi pour i), une loi $\times$ commutative est nécessairement de la forme :
$a \times b = a \alpha + b \alpha + k (1 - 2 \alpha)$ ...

Le produit nul est le seul produit qui possède un zéro et la disjonction nulle le seul produit qui possède un neutre.

Il existe un zéro à gauche et un neutre à droite si et seulement si : $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = \omega$, c'est-à-dire : $a \times b = a$. Dans ce cas le binaire E est un demi-groupe zéro à gauche (IX. 1), tout élément est à la fois zéro à gauche et neutre à droite. Par IX. 5 Théorème, ceci est équivalent à : d-groupe idempotent. Comme cette loi binaire est distributive :

Proposition 5 : Tout strict Ω-espace affine est canoniquement un d-précorps associatif idempotent.
Tout d-précorps associatif idempotent est un strict groupe ternaire avec la loi binaire distributive : $ab = a$.

Le produit : $(a,b) \to a$ sur E est appelé produit zéro à gauche.

Soit E un strict Ω-espace affine fidèle pointé en k avec la loi binaire $\times$, déduite par la construction pondérée et pour laquelle il existe un zéro à gauche : par proposition 4 iii) : $a \times b = a\alpha + k(1 \dot{-} \alpha)$ donc la loi binaire $\times$ est projection du produit zéro à gauche (avec le produit initial nul).

Soit E un strict Ω-espace affine fidèle et $k \in E$. Si la loi : $a \times b = a\alpha + b\beta + k\gamma$ possède un neutre à droite, elle s'écrit (proposition 4, iv)) : $a \times b = a + b\beta + k(\dot{-}\beta)$ ou encore : $a \times b = (a + b - k)\beta + a(1 \dot{-} \beta)$: elle est projection de la disjonction nulle dans le d-précorps associatif idempotent E.

Lemme : Soit E un Ω-espace affine fidèle, $k \in E$ et $\times$ une loi binaire déduite par la construction pondérée. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) $\times$ est indépendante de k .
ii) Le binaire E est idempotent.

Preuve : i) implique ii) : $\gamma = \omega$ donc $a \times a = a$.

ii) implique i) : $a \times a = a * (\alpha \dot{+} \beta) = a$ pour tout $a \in E$ implique $\alpha \dot{+} \beta = 1$ donc $\gamma = \omega$.

Proposition : Soit E une Ω-préalgèbre fidèle associative pour laquelle le produit $\times$ vérifie les hypothèses et propriétés du lemme précédent :

.../...

E est le produit d'un d-précorps associatif idempotent par un g-précorps associatif idempotent.

Preuve : Par le lemme précédent $a \times b = a\alpha + b(1 \dot{-} \alpha)$; par proposition 4, ii), α est idempotent ; par proposition 1, il est central.
Ceci étant on applique X. 5, Proposition, en remarquant que le produit dans $E_k * \alpha$ est : $(a * \alpha) \times (b * \alpha) = a * \alpha$, et dans $E_k * (1 \dot{-} \alpha)$:
$(a * (1 \dot{-} \alpha))(b * (1 \dot{-} \alpha)) = b * (1 \dot{-} \alpha)$.

On voit que si dans Ω : $1 \neq \omega$, aucune de ces Ω-préalgèbres associatives et idempotentes n'est un préanneau booléen [JB].

X. 10

Nous allons illustrer le chapitre précédent sur les binaires.

Soit E un strict Ω-espace affine fidèle, $k \in E$ et $\times$ la loi binaire : $a \times b = a\alpha + b\beta + k\gamma$.

Lemme 1 : i) Si E est bon à droite, $\alpha^2 = \alpha$.
ii) Si $\alpha^2 = \alpha$ et $\alpha\beta = \beta\alpha$, E est bon à droite.

Preuve : i) $(x \times a) \times b = x \times e$ s'écrit :
$x * \alpha^2 \oplus a * (\beta\alpha) \oplus b * \beta = x * \alpha \oplus e * \beta$ soit, pour $x = k$:
$a * (\beta\alpha) \oplus b * \beta = e * \beta$ ce qui impose : $x * \alpha^2 = x * \alpha$ pour tout $x \in E$.
ii) $e = a * \alpha \oplus b$.

Lemme 2 : i) Si (a,a') vérifie I_1 ou I_2 (resp. I_3 ou I_4) :
$\alpha^2 = 1$ (resp. $\beta^2 = 1$).
ii) Si $\alpha^2 = 1$ et $\alpha\beta = \beta\alpha$, E est d-inversible.

Preuve : i) $(x \times a) \times a' = x$ s'écrit : $x * \alpha^2 \oplus a * (\beta\alpha) \oplus a' * \beta = x$.
Même méthode que pour le Lemme 1.
ii) Soit $a \in E$; si on pose $a' = \ominus a * \alpha$ dans E_k, alors (a,a') vérifie I_1 et ceci quel que soit $a \in E$, donc E est d-inversible (IX. 4, Théorème).

Lemme 3 : i) Si (a,a') vérifie I_5 ou I_6 (resp. I_7 ou I_8) :
$\alpha\,\beta = 1$ (resp. $\beta\,\alpha = 1$).
ii) Si $\alpha\,\beta = \beta\,\alpha = 1$, E vérifie I_5, I_6, I_7 et I_8.

Preuve : i) $a' \times (x \times a) = x$ s'écrit : $a' * \alpha \oplus x * (\alpha\,\beta) \oplus a * \beta^2 = x$.
ii) Soit $a \in E$; si on pose : $a' = \ominus\, a * \beta^3$, (a,a') vérifie I_5 et I_8 ; si on pose : $a'' = \ominus\, a * \alpha^3$, (a,a'') véririe I_6 et I_7.

Nous appliquons maintenant ces résultats au binaire E pour $\times$ dans le cas où Ω n'est pas de caractéristique 2 :

Application 1 : $a \times b = -a + b\beta + k(2 \dot{-} \beta)$ avec $\beta^2 \neq 1$:
E est d-inversible, non commutatif, non bon à droite ; aucun élément ne vérifie I_3, I_4, I_5, I_6, I_7 ou I_8.

Application 2 : $a \times b = a + b\beta - k\beta$ avec $\beta^2 \neq 1$:
E est d-inversible, bon à droite (il est associatif si et seulement si β est idempotent), non commutatif ; aucun élément ne vérifie I_3, I_4, I_5, I_6, I_7 ou I_8.

Application 3 : $a \times b = -a - b + 3\,.\,k$:
E vérifie I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7 et I_8.
Il est commutatif mais non bon à droite.

Application 4 : $a \times b = a - b + k$:
E est inversible, non commutatif, bon à droite mais non associatif ; aucun élément ne vérifie I_5, I_6, I_7 ou I_8.
k est neutre à droite, aucun élément n'est neutre à gauche.

Application 5 : $a \times b = a\alpha + b\beta + k\gamma$ avec α et β inverses l'un pour l'autre et non involutifs $(\alpha \neq \beta)$.
E vérifie I_5, I_6, I_7 et I_8 ; aucun élément ne vérifie I_1, I_2, I_3 ou I_4.
E est non commutatif.

Complétons par un :

Exemple : Soit E un groupe binaire commutatif d'élément neutre k et Ω l'anneau des endomorphismes de E : E est canoniquement un Ω-module.

.../...

Soit α et β dans Ω avec : $\alpha\,\beta = 1$, $\beta\,\alpha \neq 1$ (α injectif, non surjectif et β surjectif, non injectif) : on considère sur E la loi binaire :
$a \times b = a * \alpha \oplus b * \beta$.
Quel que soit $a \in E$, β^2 étant surjectif, il existe $a' \in E$ tel que :
$a' * \beta^2 = \ominus\, a * \alpha$; alors pour tout $x \in E$: $a \times (x \times a') = x$.
Ainsi E vérifie I_6 .
β^2 étant surjectif et α non surjectif, on peut trouver $a \in E$ pour lequel il n'existe aucun a' tel que (a,a') vérifie I_5 : E ne vérifie pas I_5 (mais certains couples tels (k, k) le vérifient).
On voit enfin qu'aucun élément ne vérifie I_1, I_2, I_3, I_4, I_7 ou I_8 .

X. 11

Soit Ω un anneau associatif de neutre 1 et de zéro ω.
On vérifie que :

Lemme 1 : Ω^2 est canoniquement un Ω-module.
Avec le produit :
$(\alpha, \beta) \bigcirc (\alpha', \beta') = (\alpha\ (\alpha' \dot{+} \beta')\ ,\ \beta\ (\alpha' \dot{+} \beta'))$,
c'est une Ω-algèbre associative.

Lemme 2 : Soit $\vee$ la disjonction dans Ω.
Ω^2 est canoniquement un strict Ω-espace affine.
Avec le produit :
$(\alpha, \beta)\ (\alpha', \beta') = (\alpha \vee \alpha' \dot{-} \alpha\,\beta'\ ,\ \beta \vee \beta' \dot{-} \beta\,\alpha')$,
Ω^2 est une Ω-préalgèbre associative unitaire.

Preuve : $(\alpha, \beta)\ (\alpha', \beta') = (\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') - (\alpha, \beta) \bigcirc (\alpha', \beta')$:
ce produit est la disjonction de $\bigcirc$ du Lemme 1.

Les deux structures de Ω-préalgèbres des Lemmes 1 et 2 sur le strict Ω-espace affine canonique Ω^2 sont duales l'une de l'autre pour la disjonction, chacun des deux produits étant disjonction pour l'autre.
La zéro de la première : (ω, ω) devient le neutre de la seconde.
L'ensemble des neutres à droite de la première, ensemble des (α, β) tels que : $\alpha \dot{+} \beta = 1$, devient l'ensemble des zéros à droite de la seconde.

Proposition : Le binaire L' de X. 6 est canoniquement une Ω-préalgèbre associative unitaire.

Preuve : On considère la Ω-préalgèbre du Lemme 2.
L'application : $(\alpha, \beta) \in \Omega^2 \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma = 1 \dot{-} \alpha \dot{-} \beta) \in L'$ est un isomorphisme de demi-groupe unitaire.

Corollaire : Soit E une Ω-préalgèbre : le demi-groupe L des lois binaires déduites par la construction pondérée (X. 6, Proposition) est une Ω-préalgèbre associative unitaire.

Preuve : On considère le morphisme surjectif de binaire : λ, qui à $(\alpha, \beta, \gamma) \in L'$ associe : $a \times b = a\,\alpha + b\,\beta + (ab)\,\gamma$.
Si pour i de 1 à 3 les éléments u_i et u'_i de L' sont congrus modulo λ alors : $(u_1, u_2, \varepsilon, u_3)$ et $(u'_1, u'_2, \varepsilon, u'_3)$ sont congrus modulo λ .

Si E est un strict Ω-espace affine fidèle avec le produit initial nul (X. 9) alors λ est un isomorphisme puisque :
$a * \alpha \oplus b * \beta = a * \alpha' \oplus b * \beta'$ implique $a * \alpha = a * \alpha'$ et $b * \beta = b * \beta'$, pour tous a,b de E.

X. 12

En X. 6 nous avons étudié les lois binaires définies par :
$a \times b = a\,\alpha + b\,\beta + (ab)\,\gamma$ sur une Ω-préalgèbre avec $\alpha \dot{+} \beta \dot{+} \gamma = 1$ dans Ω, et en X. 9 les lois binaires : $a \times b = a * \alpha \oplus b * \beta$ sur un Ω-module pour α et β quelconques dans Ω.
On suppose maintenant Ω associatif et commutatif et on considère sur une Ω-algèbre P, de zéro ω et de neutre 1, les lois binaires définies par :
$a \times b = a\,\alpha + b\,\beta + (ab)\,\gamma$, avec α, β, γ quelconques dans Ω.

Proposition 1 : Le strict Ω-espace affine P muni du nouveau produit $\times$ est une Ω-préalgèbre.

Preuve : $a \times (\Sigma\, b_i\, \varepsilon_i) = a\,\alpha + (\Sigma\, b_i\, \varepsilon_i)\,\beta + a(\Sigma\, b_i\, \varepsilon_i)\,\gamma$
$= \Sigma\, a\,\alpha\, \varepsilon_i + \Sigma\, b_i\,\beta\, \varepsilon_i + \Sigma\, a\, b_i\,\gamma\, \varepsilon_i$
$= \Sigma\, (a \times b_i)\, \varepsilon_i$.

.../...

De même à gauche.

On note $P(\alpha, \beta, \gamma)$ la Ω-préalgèbre de cette proposition 1.

En utilisant systématiquement les éléments ω et 1 on montre que :

Proposition 2 : $P(\alpha, \beta, \gamma)$:

i) Est commutative si et seulement si $\alpha = \beta$ et pour tous a, b : $ab\,\gamma = ba\,\gamma$ (cette dernière condition est réalisée lorsque P est commutative).

ii) Est associative si et seulement si $\alpha = \alpha^2$, $\beta = \beta^2$, $\alpha\,\gamma = \beta\,\gamma$ et pour tous a, b, c : $(ab)c\,\gamma^2 = a(bc)\,\gamma^2$ (cette dernière condition est réalisée lorsque P est associative).

Un élément δ de Ω est localement inversible s'il est divisible par son carré, c'est-à-dire s'il existe δ'' tel que $\delta = \delta''\,\delta^2$. Cette propriété est équivalente à la suivante : il existe δ' et un idempotent ε tels que $\delta\,\varepsilon = \delta$, $\delta'\,\varepsilon = \delta'$, $\delta\,\delta' = \varepsilon$; δ est l'inverse local de δ et ε son neutre local.

Proposition 3 : $P(\alpha, \beta, \gamma)$:

i) Contient un neutre u si et seulement si $\alpha = \beta$ est idempotent et γ est localement inversible avec un neutre local supérieur ou égal (ordre sur les idempotents de Ω) à $(1 \dot{-} \alpha)$; alors u est l'inverse local de $\gamma(1 \dot{-} \alpha)$.

ii) Contient un zéro k si et seulement si $\alpha = \beta$ est idempotent et γ est localement inversible avec un neutre local supérieur ou égal à α ; alors k est l'opposé de l'inverse local de $\gamma\,\alpha$.

Preuve : i) Si pour tout a : $a = a\,\alpha + u\,\beta + a\,u\,\gamma = u\,\alpha + a\,\beta + u\,a\,\gamma$, alors $\omega = u\,\beta = u\,\alpha$ donc $a = a\,\alpha + a\,u\,\gamma = a\,\beta + u\,a\,\gamma$, d'où (avec $a = 1$) $\alpha = \beta$ et $1 = \alpha + u\,\gamma$; multipliant cette dernière égalité par α, il vient $\alpha^2 = \alpha$; enfin $u\,\gamma = 1 \dot{-} \alpha$ et $u(1 \dot{-} \alpha) = 1 \dot{-} \alpha$.

Réciproquement si u est l'inverse local de $\gamma(1 \dot{-} \alpha)$:

$a \times u = a\,\alpha + u\,\alpha + a\,u\,\gamma = a\,\alpha + a(1 \dot{-} \alpha) = a$; de même $u \times a = a$.

ii) Si, pour tout a : $k = a\,\alpha + k\,\beta + a\,k\,\gamma = k\,\alpha + a\,\beta + k\,a\,\gamma$, alors $k = k\,\beta = k\,\alpha$ donc $\gamma = a\,\alpha + a\,k\,\gamma = a\,\beta + k\,a\,\gamma$, d'où $\alpha = \beta$ et

.../...

$\alpha + k\gamma = \omega$; ensuite $\alpha^2 = \alpha$; enfin $(-k)\gamma = \alpha$ et $(-k)\alpha = (-k)$.
Réciproquement, si $(-k)$ est l'inverse local de $\gamma\alpha$:
$a \times k = a\alpha + k\alpha + a k \gamma = a\alpha + k - a\alpha = k = k \times a$.

La condition ii) de cette proposition 3 est celle pour laquelle $P(\alpha, \beta, \gamma)$ est une Ω-algèbre.
$P(\alpha, \beta, \gamma)$ est une Ω-algèbre unitaire si et seulement si $\alpha = \beta$ est idempotent et γ est inversible.
Si $P(\alpha, \beta, \gamma)$ contient un neutre ou un zéro, il résulte de la proposition 2 que la loi $\times$ est certainement commutative ou associative lorsqu'il en est ainsi pour le produit initial sur P.
Enfin on montre aisément que :
i) Les Ω-algèbres $P(\alpha, \beta, \gamma)$ avec pour zéro celui de P sont les $P(\omega, \omega, \gamma)$.
ii) Les Ω-préalgèbres unitaires $P(\alpha, \beta, \gamma)$ avec pour neutre le zéro de P sont les $P(1, 1, \gamma)$.

Les préalgèbres unitaires $P(1, 1, \gamma)$ ont un intérêt très actuel dans la recherche sur les formes quadratiques où l'on étudie un certain groupe $A(n)$, qui pour un anneau associatif A et un entier relatif n, est un sous-groupe du demi-groupe $(A, \times)$ pour la loi : $a \times b = a + b - n\,a\,b$.
On notera que pour un anneau A de caractéristique n ($\mathbb{Z}/n$-algèbre) la loi $\times$ précédente est la somme initiale sur A. D'autre part, il est bien connu que l'ensemble des idempotents de A est un sous-groupe de $A(2)$.

XI. 1

Définition 1 : Soit B un binaire et $u \in B$:

$a \in B$ est u-pareil (on sous-entend à droite) si $d_a = d_u$ (IX. 1, Notation).

a est donc u-pareil si pour tout $x \in B$: $xa = xu$.

Exemple : i) On a vu en IX. 5 que si B est un demi-groupe et u est d-inversible, l'ensemble des u-pareils est $N_d u$.

ii) Si B contient un neutre à gauche, u est l'unique u-pareil.

Proposition 1 : Soit Q une Ω-préalgèbre :

i) L'ensemble P(u) des u-pareils est un sous-espace affine.

ii) Quels que soient u et w, P(u) et P(w) sont translatés l'un de l'autre, donc isomorphes.

Preuve : i) Si a, b, c sont dans P(u) : $x(a, b, \varepsilon, c) = (xa, xb, \varepsilon, xc) = xu$.

ii) Si $a \in P(u)$, $(a - u + w) \in P(w)$. On applique VI. 2.

Proposition 2 : Soit Q une Ω-préalgèbre :

i) e étant neutre à droite, P(e) avec la restriction du produit dans Q, est le d-précorps associatif idempotent N_d des neutres à droite de Q (X. 9, Proposition 5).

ii) k étant zéro à droite, est le seul idempotent de P(k). P(k) avec la restriction du produit dans Q est la Ω-algèbre nulle sur le strict Ω-espace affine P(k) pointé en k (X. 9).

Preuve : i) $a \in P(e)$ si et seulement si pour tout $x \in Q$: $xa = x$.

ii) Si a est idempotent : $a = a^2 = ak = k$.

Si a et b sont dans P(k) : $ab = ak = k$.

Corollaire des propositions 1 et 2 : Soit Q une Ω-préalgèbre, N_d l'ensemble non vide des neutres à droite et $u \in Q$: P(u) est l'ensemble des $(u - e + e')$ avec e et e' dans N_d.

Proposition 3 : Soit Q une Ω-préalgèbre associative et u idempotent dans Q : P(u) est une sous-algèbre. u est zéro à gauche dans P(u).

Preuve : L'application : $a \to d_a$ étant un morphisme d_u est idempotent donc P(u) est stable par le produit.

Définition 2 : Soit Q une Ω-préalgèbre et $u \in Q$:

$a \in Q$ est u-translatif (on sous-entend à droite) si a est u-pareil dans la duale de Q pour la disjonction (X. 6).

Lemme : a est u-translatif si et seulement si pour tout $x \in Q$:

$xa = xu - u + a$.

Par dualité pour la disjonction on obtient :

Proposition 1 bis : Soit Q une Ω-préalgèbre :

i) L'ensemble T(u) des u-translatifs est un sous-espace affine.

ii) Quels que soient u et w, T(u) et T(w) sont translatés l'une de l'autre, donc isomorphes.

Proposition 2 bis : Soit Q une Ω-préalgèbre :

i) e étant neutre à droite, est le seul idempotent de T(e). T(e) avec la restriction du produit dans Q est le précorps commutatif (unitaire) canonique sur le strict Ω-espace affine T(e) pointé en e (X. 9, Proposition 2).

ii) k étant zéro à droite, T(k) avec la restriction du produit dans Q est le g-précorps associatif idempotent des zéros à droite Q^o de Q .

Pour i) le produit dans T(u) est la disjonction nulle :

$ab = a + b - e$.

Pour ii) le produit dans T(k) est : $ab = b$.

Corollaire bis : Soit Q une Ω-préalgèbre, Q^o l'ensemble non vide des zéros à droite et $u \in Q$:

T(u) est l'ensemble des $(u - k + k')$ avec k et k' dans Q^o .

Proposition 4 : Soit Q une Ω-préalgèbre associative et u un idempotent de Q

T(u) est, avec le produit dans Q, un g-précorps associatif pour lequel u est neutre à gauche.

Preuve : $T(u)$ est une sous-préalgèbre de Q et u est neutre à gauche dans $T(u)$.

Soit $a \in T(u)$ et $a' = u + u - au$:

i) $xa' = xu + xu - xau$

$= xu + xu - xu + u - au$

$= xu - u + a'$

donc $a' \in T(u)$.

ii) $aa' = au - u + u + u - au = u$.

Ainsi tout élément a de $T(u)$ vérifie I_4 (IX. 3).

On termine par IX. 4, Théorème (ou en vérifiant directement que $a'a = u - au + a$, est, lui aussi, neutre à gauche dans $T(u)$).

XI. 2

Ω est ici commutatif.

Proposition 1 : Soit E un strict Ω-espace affine.

Hom (E, E) est une Ω-préalgèbre associative unitaire.

... C'est donc une $\mathfrak{A}$-algèbre (peu) camouflée (X. 7 Définition).

Preuve de la proposition 1 : Ω étant commutatif, Hom (E, E) est un strict Ω-espace affine (VI. 8, Proposition) ; il contient l'application identique $\mathcal{J}$. Hom (E, E) est une partie stable du demi-groupe $(E)\mathfrak{A}$ des applications de E dans E.

Enfin dans Hom (E, E) le produit est distributif par rapport à l'opération affine.

Proposition 2 : Soit E un strict Ω-espace affine :

i) Le sous-espace affine T^0 des zéros à droite de Hom (E, E) n'est pas vide ; il peut être canoniquement identifié à E.

ii) Le sous-précorps commutatif associatif T^1 des $\mathcal{J}$-translatifs de Hom (E, E) (XI. 1, Proposition 2 bis, i)) est le précorps des translations de E.

Preuve : i) Quel que soit $k \in E$ l'application : $a \to k$, est un zéro à droite de Hom (E, E).

.../...

Réciproquement, soit Ψ un zéro à droite de Hom (E, E) : c'est un idempotent donc il existe $k \in (E)\,\Psi \subset E$ pour lequel $(k)\,\Psi = k$ alors Ψ qui commute avec le zéro à droite : $a \to k$, lui est égal.

ii) Par XI. 1, Corollaire bis et compte tenu du i) précédent, T^1 est l'ensemble des applications :

$$a \to a - k + k' \ .$$

Proposition 3 : Soit E un strict Ω-espace affine, $k \in E$ et θ^k le zéro à droite canoniquement associé dans Hom (E, E) :
La Ω-algèbre des morphismes du Ω-module E_k est le centraliseur de θ^k dans Hom (E, E).

Proposition 4 : Soit F un Ω-espace affine régulier :
Hom (F, F) est une Ω-préalgèbre associative unitaire à involution (X. 3, Définition).

Preuve : Soit E le strict Ω-espace affine sous-jacent à F : l'involution barre est un involutif de Hom (E, E) et Hom (F, F), centraliseur de barre, est une sous-préalgèbre de Hom (E, E) qui contient le neutre $\mathcal{I}$ et l'involutif barre.
Par VI. 8, Proposition, Hom (F, F) est un Ω-espace affine ($(a)\,\bar{\theta} = (\bar{a})\,\theta$ pour tout $a \in F$) et par IX. 7 c'est un binaire à involution ($\overline{\theta\,\psi} = \bar{\theta}\,\bar{\psi} = \theta\,\bar{\psi}$).

XI. 3

Ω est commutatif et associatif.

Soit n un entier positif et M la Ω-algèbre associative unitaire des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans Ω .
La $i^{\text{ème}}$ ligne de $(\alpha_{ij}) \in M$ est unitaire si :

$$\alpha_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_n = 1 \ .$$

Définition : Une prématrice est une matrice dont toutes les lignes sont unitaires.

Proposition 1 : L'ensemble P des prématrices carrées $n \times n$ à coefficients dans Ω est une Ω-préalgèbre associative unitaire.

Preuve : P est un sous-espace affine de M et contient la matrice unité. Considérons le produit $c = ab$ avec : $a = (\alpha_{ik})$, $b = (\beta_{kj})$: la somme des éléments de la $i^{ème}$ ligne de c est la somme sur k des : $\alpha_{ik} (\beta_{k1} \dot{+} \dots \dot{+} \beta_{kn}) = \alpha_{ik}$; c'est donc une prématrice.

Soit X un ensemble (non vide) et E le strict Ω-espace affine libre pour X (VII. 5) : un élément a de E s'écrit $a = \Sigma\, x_i\, \alpha_i$ avec la somme des α_i non nuls (nombre fini) égale à 1.
Un morphisme θ de E dans E vérifie : $(a)\,\theta = \Sigma\, (x_i)\,\theta\, \alpha_i$: il est déterminé par la donnée du tableau (ε_{ij}) avec : $(x_i)\,\theta = \Sigma\, x_j\, \varepsilon_{ij}$. Toutes les lignes du tableau (ε_{ij}) étant unitaires on dit que (ε_{ij}) est une prématrice carrée indexée par X.
Soit (δ_{ij}) une prématrice carrée indexée par X et $a = \Sigma\, x_i\, \alpha_i \in E$: $\Sigma\, x_j\, \delta_{ij}\, \alpha_i$, la sommation portant sur i et j, est un élément de E puisque la somme sur i et j des $\delta_{ij}\, \alpha_i$ est la somme sur i des α_i c'est-à-dire 1. Il est immédiat que l'application : $a \to \Sigma\, x_j\, \delta_{ij}\, \alpha_i$, est un endomorphisme de E.
Ainsi la correspondance qui a un élément θ de Hom (E, E) associe la prématrice carrée (ε_{ij}) indexée par X, est bijective. Par transport de structure l'ensemble des prématrices carrées indexées par X est donc une Ω-préalgèbre isomorphe à Hom (E, E) (XI. 2, Proposition 1). On voit que lorsque card $X = n$, on retrouve la Ω-préalgèbre des prématrices carrées $n \times n$.

Observons maintenant le cas $n = 2$: Ω étant rapporté à la base affine $\{1, \omega\}$, $\alpha \in \Omega$ s'écrit : $\alpha = 1\,\alpha + \omega\,(1 \dot{-} \alpha)$.
Une prématrice carrée 2×2 s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u & (1 \dot{-} u) \\ k & (1 \dot{-} k) \end{pmatrix}$$

et détermine un morphisme affine θ sur Ω par :

$$(1)\,\theta = 1\,u + \omega\,(1 \dot{-} u) = u$$
$$(\omega)\,\theta = 1\,k + \omega\,(1 \dot{-} k) = k$$

soit : $(\alpha)\,\theta = \alpha\, u + (1 \dot{-} \alpha)\, k$
$(\alpha)\,\theta = \alpha\,(u \dot{-} k) + k$.

Appliquant III. 10, Définition, au strict Ω-espace affine Ω, on voit que : $\alpha \to \alpha\,\varepsilon + \delta$ est une dilatation de Ω. Ainsi :

Proposition 2 : Les morphismes affines de Ω sont les dilatations.

Une dilatation est déterminée par les images respectives u et k de 1 et ω ; c'est un automorphisme si et seulement si $(u\dot{-}k)$ est inversible dans Ω .

Soit X un ensemble à involution $\wedge$; on pose :

$$x_{\hat{i}} = \hat{x}_i \quad , \text{ ce qui détermine } \hat{i} \ .$$

Lemme 1 : Le strict Ω-espace affine libre pour l'ensemble X, muni de l'involution canonique :

$$\overbrace{\Sigma\ x_i\ \alpha_i} = \Sigma\ x_j\ \alpha_{\hat{j}} \ ,$$

est un Ω-espace affine.

Preuve : VII. 5, Proposition 2.

Lemme 2 : Soit X un ensemble à involution $\wedge$, E le Ω-espace affine du lemme 1 et (ε_{ij}) une prématrice carrée indexée par X :
(ε_{ij}) détermine un endomorphisme sur E si et seulement si :
$\varepsilon_{\hat{i}j} = \varepsilon_{i\hat{j}}$.

Preuve : Soit θ l'endomorphisme pour le strict Ω-espace affine E tel que : $(x_i)\,\theta = \Sigma\ x_j\ \varepsilon_{ij}$.

Condition nécessaire : $(\hat{x}_i)\,\theta = (x_{\hat{i}})\,\theta = \overbrace{(x_i)\,\theta}$.

Conditions suffisante : $\overbrace{(a)\,\theta} = \Sigma\ \overbrace{(x_i)\,\theta}\ \alpha_i = \Sigma\ (\hat{x}_i)\,\theta\ \alpha_i = (\hat{a})\,\theta$.

Par ce Lemme 2 et XI. 2, Proposition 4 :

Proposition 3 : Soit $(X, \wedge)$ un ensemble à involution :

L'ensemble des prématrices carrées (ε_{ij}) indexées par X et vérifiant : $\varepsilon_{\hat{i}j} = \varepsilon_{i\hat{j}}$ pour tous i,j est une Ω-préalgèbre associative unitaire à involution.

Comme : $(x_i)\,\hat{\theta} = (x_{\hat{i}})\,\theta$, l'involution sur ces prématrices consiste, pour tout i, à échanger les lignes i et $\hat{i}$.

Soit X un ensemble, $\hat{X}$ une copie (distincte) de X, $Y = X \cup \hat{X}$ et F le Ω-espace affine régulier libre pour l'ensemble X. F est encore le Ω-espace

affine du lemme 1 pour l'ensemble Y avec l'involution : $x \longleftrightarrow \hat{x}$.
Par la proposition 3 une prématrice carrée (ε_{ij}) indexée par Y détermine un endomorphisme de F si et seulement si : $\varepsilon_{\hat{i}j} = \varepsilon_{i\hat{j}}$.
Dans le cas actuel le tableau (ε_{ij}) comporte quatre parties disjointes représentées :

1	2
3	4

1 (resp. 2, 3, 4) contient les ε_{ij} (resp. $\varepsilon_{i\hat{j}}$, $\varepsilon_{\hat{i}j}$, $\varepsilon_{\hat{i}\hat{j}}$) les indices étant associés à X seul.

On appelle prématrice rectangle indexée par X, Y un tableau (δ_{ij}) dont toutes les lignes sont unitaires (prématrice) et pour lequel les i sont associés à X et les j à Y.
Pour la représentation précédente une prématrice rectangle indexée par X, Y correspond aux parties 1 et 2.

Proposition 4 : Avec les notations précédentes l'ensemble des prématrices rectangles indexées par X, Y est une Ω-préalgèbre associative unitaire à involution.

Preuve : Par : $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}$ et $\varepsilon_{\hat{i}j} = \varepsilon_{i\hat{j}}$ pour tous i, (resp. j) associés à X (resp. Y) on établit une bijection entre l'ensemble des prématrices rectangles indexées par X, Y et l'ensemble des prématrices carrées indexées par Y et vérifiant proposition 3.

Pour proposition 4 l'involution sur (δ_{ij}) consiste pour tout j à échanger les colonnes j et $\hat{j}$; la $i^{ème}$ ligne du produit s'écrit :

$$\Sigma\ (\delta_{ik}\ \gamma_{kj}) + \Sigma\ \delta_{i\hat{k}}\ \gamma_{k\hat{j}}\ ,$$

les indices étant, dans cette expression, associés à X.

XI. 4

Soit F une Ω-préalgèbre à involution barre et X une partie de F : la sous-préalgèbre à involution de F engendrée par X est l'intersection des sous-espaces de F contenant X (VI. 1).
On note $\bar{X}$ l'ensemble des $\bar{x}$ de F pour x parcourant X.

Proposition 1 : Soit F une Ω-préalgèbre à involution, X une partie de F, $Y = X \cup \bar{X}$, B le sous-espace engendré par la partie Y du binaire F et N le sous-espace affine engendré par la partie B du strict Ω-espace affine F :
N est la sous-préalgèbre à involution de F engendrée par X.

Preuve : Toute sous-préalgèbre à involution de F contenant X contient N. N est l'ensemble des $\Sigma\ b_i\ \alpha_i$ avec $b_i \in B$ (VII. 4, Proposition 1) : par X. 4, Lemme 1, N est stable pour le produit dans F.
D'autre part le binaire B est à involution barre donc $\overline{\Sigma\ b_i\ \alpha_i} = \Sigma\ \bar{b}_i\ \alpha_i$ (X. 4 Lemme 2) est dans N.

Corollaire : Soit E une Ω-préalgèbre, X une partie de E et B le sous-binaire de E engendré par X :
La sous-préalgèbre de E engendrée par X est l'ensemble des $\Sigma\ b_i\ \alpha_i$ avec $b_i \in B$.

Soit E une Ω-préalgèbre et X une partie de E qui engendre le strict Ω-espace affine E. Le produit dans E est déterminé par sa restriction à X puisque, par X. 4, Lemme 1 :

$$(\Sigma\ x_i\ \alpha_i)\ (\Sigma\ x_j\ \beta_j) = \Sigma\ (x_i\ x_j)\ (\alpha_i\ \beta_j)\ .$$

Soit X un ensemble et E le strict Ω-espace affine libre pour X ; on se donne dans E : $x_i\ x_j = \Sigma\ x_k\ \varepsilon_k^{ij}$ pour tous x_i, x_j de X, ce qui revient à se donner les ε_k^{ij} pour lesquels la somme sur k est égale à 1. Le tableau (ε_k^{ij}) est appelé prétable indexée par X.

Exemple : Si X est un binaire, $x_i\ x_j = x_k$ d'où :

$$\varepsilon_k^{ij} = 1 \quad ; \quad \varepsilon_h^{ij} = \omega \quad \text{pour tout } h \neq k\ .$$

Proposition 2 : Avec Ω-associatif et commutatif, soit $(X, \wedge)$ un ensemble à involution, E le strict Ω-espace affine libre pour l'ensemble X, et (ε_k^{ij}) une prétable indexée par X :
Muni de

$$\overbrace{\Sigma\ x_i\ \alpha_i} = \Sigma\ \hat{x}_i\ \alpha_i$$

$$(\Sigma\ x_i\ \alpha_i)\ (\Sigma\ x_j\ \beta_j) = \Sigma\ x_k\ (\varepsilon_k^{ij}\ \alpha_i\ \beta_j)\ ,$$

E est une Ω-préalgèbre à involution $\wedge$, si et seulement si :

$$\varepsilon_k^{\hat{i}\hat{j}} = \varepsilon_k^{i\hat{j}} = \varepsilon_{\hat{k}}^{ij}\ .$$

Preuve : Par XI. 3, Lemme 1, E est un Ω-espace affine.
Ω étant associatif et commutatif, on voit que le produit est distributif par rapport à la loi pondérée.
Enfin K_4 (X. 3) est équivalent à la dernière condition puisque :

$$x_i\, x_j = \Sigma\, x_k\, \varepsilon_k^{ij} \qquad \text{et} \qquad \hat{x}_i = x_{\hat{i}} \ .$$

Corollaire : Avec Ω associatif et commutatif si (ε_k^{ij}) est une prétable pour l'ensemble X, le strict Ω-espace affine libre pour l'ensemble X est une Ω-préalgèbre pour le produit :

$$(\Sigma\, x_i\, \alpha_i)\ (\Sigma\, x_j\, \beta_j) = \Sigma\, x_k\, (\varepsilon_k^{ij}\, \alpha_i\, \beta_j)$$

Le strict Ω-espace affine libre E pour l'ensemble X est canoniquement plongé dans le Ω-module libre M pour l'ensemble X (combinaisons linéaires formelles des x_i) et M est une Ω-algèbre pour la construction du corollaire, donc la Ω-préalgèbre E est canoniquement plongée dans la Ω-algèbre M : c'est la partie des $x_1 * \alpha_1 \oplus \ldots \oplus x_n * \alpha_n$, avec $\alpha_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_n = 1$.
Toutefois la portée pratique de ce plongement de E dans M est limitée par le fait que peu de propriétés s'étendent de E à M.

Soit n un entier positif, X l'ensemble : $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$, (ε_k^{ij}) une prétable indexée par X et E la Ω-préalgèbre du corollaire : le strict Ω-espace affine E est isomorphe à Ω^n. Cette construction permet donc de munir Ω^n d'une structure de préalgèbre.
Pratiquement on identifie x_i à $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, où 1 est en $i^{\text{ème}}$ position pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et x_{n+1} à $(0, \ldots, 0)$; alors :
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Sigma\, x_i\, \alpha_i$ avec $\alpha_{n+1} = 1 \dot{-} \alpha_1 \ldots \dot{-} \alpha_n$.
Le plongement éventuel dans la Ω-algèbre M construite sur Ω^{n+1} avec la même table (ε_k^{ij}) se fait canoniquement : $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$.

Soit X un ensemble, $\hat{X}$ une copie (distincte) de X, $Y = X \cup \hat{X}$ et F le Ω-espace affine régulier libre pour l'ensemble X. F est encore le Ω-espace affine de XI. 3, Lemme 1 pour l'ensemble Y avec l'involution : $x \longleftrightarrow \hat{x}$, ce qui permet d'appliquer à $(Y, \wedge)$ la construction de proposition 2.

On appelle prétable sur X indexée par Y un tableau (ε_k^{ij}) pour lequel i et j sont associés à X et k à Y et la somme sur k des ε_k^{ij} est égale à 1.

Proposition 3 : Avec les notations précédentes une prétable ε_k^{ij} sur X indexée par Y permet de munir F d'une structure de Ω-préalgèbre à involution.

Preuve : On pose :

$$\varepsilon_k^{ij} = \varepsilon_k^{\hat{i}\hat{j}} = \delta_k^{ij} \quad ; \quad \varepsilon_k^{\hat{i}j} = \varepsilon_k^{i\hat{j}} = \delta_{\hat{k}}^{ij} \ .$$

Puis on applique la construction de proposition 2, pour laquelle la condition est satisfaite.

XI. 5

Ω est un anneau associatif, commutatif ; sa somme est simplement notée + .

Dans ce paragraphe le strict Ω-espace affine Ω est rapporté à sa base affine : $\{1, \omega\}$. L'expression : "le strict Ω-espace affine Ω est une Ω-préalgèbre" sous-entend : "pour la construction de XI. 4, Corollaire, à partir de la base affine : $\{1, \omega\}$".
$a \in \Omega$ s'écrit : $a = 1\,a + \omega\,(1 - a)$.

On considère dans Ω :

	1	ω
1	ε_{11}	ε_{10}
ω	ε_{01}	ε_{00}

et le produit : $a \times b = (1\,a + \omega\,(1 - a))\,(1\,b + \omega\,(1 - b))$ que permet de lui associer X. 4, Lemme 1.

Proposition 1 : Le strict Ω-espace affine Ω est une Ω-préalgèbre avec le nouveau produit $\times$ si et seulement si il existe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dans Ω, tels que :
$a \times b = ab\,\alpha + a\,\beta + b\,\gamma + \delta$.

Preuve : Les systèmes suivants sont équivalents :

$$\begin{aligned} \delta &= \varepsilon_{00} \\ \gamma &= \varepsilon_{01} - \varepsilon_{00} \\ \beta &= \varepsilon_{10} - \varepsilon_{00} \\ \alpha &= \varepsilon_{11} - \varepsilon_{10} - \varepsilon_{01} + \varepsilon_{00} \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_{00} &= \delta \\ \varepsilon_{01} &= \gamma + \delta \\ \varepsilon_{10} &= \beta + \delta \\ \varepsilon_{11} &= \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{aligned}$$

.../...

Par conséquent : $a \times b = ab\,\alpha + a\,\beta + b\,\gamma + \delta$, est équivalent à :

$$a \times b = ab\,\varepsilon_{11} + a(1-b)\,\varepsilon_{10} + b(1-a)\,\varepsilon_{01} + (1-a)\,(1-b)\,\varepsilon_{00}$$
$$= (1\,a + \omega\,(1-a))\,(1\,b + \omega\,(1-b)) .$$

On vérifie que :

Lemme 1 : La loi produit : $a \times b = ab\,\alpha + a\,\beta + b\,\gamma + \delta$ sur Ω est :

i) commutative si et seulement si : $\beta = \gamma$;

ii) associative si et seulement si :

$$\alpha\,\beta = \alpha\,\gamma \;\; ; \;\; \delta\,\beta = \delta\,\gamma \;\; ; \;\; \beta^2 = \alpha\,\delta + \beta \;\; ; \;\; \gamma^2 = \alpha\,\delta + \gamma .$$

Lemme 2 : i) k est zéro pour le nouveau produit $\times$ si et seulement si

$$\beta = \gamma = -\,k\,\alpha \;\; ; \;\; \delta = k + k^2\,\alpha$$

ii) u est neutre pour le nouveau produit $\times$ si et seulement si :

$$\beta = \gamma = 1 - u\,\alpha \;\; ; \;\; \delta = u^2\,\alpha - u \quad .$$

Par proposition 1, Lemme 1 et Lemme 2 :

Proposition 2 : Le strict Ω-espace affine Ω est une Ω-algèbre (resp. Ω-préalgèbre unitaire) de zéro k (resp. de neutre u) si et seulement si :

$a \times b = ab\,\alpha - (a + b)\,k\,\alpha + k^2\,\alpha + k$

(resp. $a \times b = ab\,\alpha + (a + b)\,(1 - u\,\alpha) + u^2\,\alpha - u$) .

Alors ce nouveau produit $\times$ est commutatif et associatif.

En particulier pour $k = \omega$: $a \times b = ab\,\alpha$.

Théorème 1 : Soit Ω un anneau associatif, commutatif, unitaire, k et u des éléments de Ω :

Le strict Ω-espace affine Ω est une Ω-algèbre de zéro k et de neutre u si et seulement si :

i) $(u - k)$ est inversible ;

ii) $a \times b = (u - k)^{-1}\,(ab - (a + b)\,k + k\,u)$.

Cette nouvelle Ω-algèbre est isomorphe à Ω (initiale).

Preuve : Par hypothèse : $-\,k\,\alpha = 1 - u\,\alpha$ (lemme 2) donc $(u - k)\,\alpha = 1$.

La dilatation : $a \to a(u - k) + k$ est un isomorphisme pour le strict Ω-espace

affine Ω (XI. 3, Proposition 2). De plus on vérifie que :

$$ab\,(u - k) + k = (a\,(u - k) + k) \times (b\,(u - k) + k)\ .$$

C'est donc un isomorphisme de Ω-algèbres.

Le reste à facile à démontrer.

L'involution : $1 \longleftrightarrow \omega$ sur $\{1, \omega\}$ s'étend à Ω par :

$$\bar{a} = \overline{1\,a + \omega\,(1 - a)} = \omega\,a + 1\,(1 - a) = 1 - a\ ;$$

d'où :

Proposition 3 : Le Ω-espace affine régulier libre pour un ensemble à un seul élément est isomorphe à Ω avec l'opération affine :

$$a\,\varepsilon - (1 - b)\,\varepsilon + c\ .$$

Considérons la prétable du début de ce paragraphe : le Ω-espace affine Ω de proposition 3 muni de cette prétable est une Ω-préalgèbre à involution si et seulement si :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{00} = \delta \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_{10} = \varepsilon_{01} = \bar{\delta} = (1 - \delta)$$

(XI. 4, Proposition 2).

La loi : $a \times b$ correspondante s'écrit alors :

$$a \times b = (1 - 2\,\delta)\,(-2\,a\,b + a + b) + \delta\ .$$

Théorème 2 : Soit Ω un anneau associatif commutatif, unitaire, muni de l'involution : $\bar{a} = 1 - a$, définie par : $\omega \longleftrightarrow 1$ sur la base affine : $\{\omega, 1\}$:

Par la construction de XI. 4, Proposition 2 sur Ω on obtient une Ω-préalgèbre à involution barre associative et commutative.

C'est une Ω-algèbre à involution si et seulement si 2 est inversible dans l'anneau Ω initial ; alors le zéro k est $\frac{1}{2}$.

Preuve : Avec les notations du Lemme 1 : $\beta = \gamma = (1 - 2\,\delta)$, d'où la commutativité ; $\alpha = -2\,\beta$ soit $\alpha\,\delta + \beta = \beta\,(1 - 2\,\delta) = \beta^2$, d'où l'associativité.

Par le lemme 2, si k est zéro : $\beta = -k\,\alpha$ et $\delta = k + k^2\,\alpha$, d'où :

$1 - 2\,\delta = 2\,k - 4\,k\,\delta$ et $\delta = k - k\,\beta = 2\,k\,\delta$ donc :

$$1 = 2\,k \qquad ; \qquad \mathbf{2} \text{ est inversible.}$$

Si 2 est inversible :

$$a \times \frac{1}{2} = \beta\,(-a + a + \frac{1}{2}) + \delta = \frac{1}{2}\,(\beta + 2\,\delta) = \frac{1}{2}\ .$$

Proposition 4 : La Ω-préalgèbre Ω à involution associative et commutative avec : $\bar{a} = 1 - a$

$$a \times b = \beta\ (-2\ a\ b + a + b) + \delta \qquad \text{où } \beta = 1 - 2\ \delta\ ,$$

est unitaire si et seulement si β est inversible dans l'anneau Ω initial ; alors le neutre u est $-\frac{\delta}{\beta}$.

Preuve : Si u est neutre, par le Lemme 2 : $\beta = 1 + 2\ u\ \beta$ soit :

$$\beta\ (1 - 2\ u) = 1 \quad : \quad \beta \text{ est inversible.}$$

Si β est inversible :

$$a\ (-\frac{\delta}{\beta}) = 2\ a\ \delta + a\ \beta - \delta + \delta = a\ (\beta + 2\ \delta) = a\ .$$

En particulier :

Pour : $a \times b = 2\ ab - a - b + 1$ le neutre est 1 .

Pour : $a \times b = -\ 2\ ab + a + b$ le neutre est ω .

XI. 6

Ω est associatif et commutatif.

Proposition 1 : Soit B un binaire à involution $\wedge$ (IX. 7).

La Ω-préalgèbre à involution L libre pour $(B, \wedge)$ est le Ω-espace affine régulier libre pour $(B, \wedge)$ (VII. 5, Proposition 2), avec le produit :

$$(\Sigma\ b_i\ \alpha_i)\ (\Sigma\ b_j\ \beta_j) = \Sigma\ (b_i\ b_j)\ (\alpha_i\ \beta_j)\ .$$

Preuve : L est le strict Ω-espace affine libre pour l'ensemble B avec l'involution : $\overbrace{\Sigma\ b_i\ \alpha_i} = \Sigma\ \hat{b}_i\ \alpha_i$, qui vérifie K_3 .

Par XI. 4, Proposition 2, L est une Ω-préalgèbre à involution $\wedge$.

Par : $b_i \to b_i\ 1$, B se plonge dans L.

Soit θ un morphisme de binaire à involution de B dans une Ω-préalgèbre à involution F : il existe un unique morphisme ψ de Ω-espace affine de L dans F qui prolonge θ (VII. 5, Proposition 2) ; de plus :

$$\begin{aligned}(\Sigma\ b_i\ \alpha_i)\ \psi\ (\Sigma\ b_j\ \beta_j)\ \psi &= (\Sigma\ (b_i)\ \theta\ \alpha_i)\ (\Sigma\ (b_j)\ \theta\ \beta_j) \\ &= \Sigma\ (b_i)\ \theta\ (b_j)\ \theta\ \alpha_i\ \beta_j \\ &= \Sigma\ (b_i\ b_j)\ \theta\ \alpha_i\ \beta_j \\ &= (\Sigma\ (b_i\ b_j)\ (\alpha_i\ \beta_j))\ \psi\end{aligned}$$

Corollaire 1 : Soit B un binaire.

La Ω-préalgèbre L libre pour B est le strict Ω-espace affine libre pour B avec le produit :

$(\Sigma\ b_i\ \alpha_i)\ (\Sigma\ b_j\ \beta_j) = \Sigma\ (b_i\ b_j)\ (\alpha_i\ \beta_j)$

Un raisonnement analogue montre que si M est le Ω-module libre pour B avec l'involution $\wedge$ et le produit définis de la même manière qu'en proposition 1, M est la Ω-algèbre à involution (X. 3) libre pour $(B, \wedge)$.

Lemme 1 : Soit $(B, \wedge)$ un binaire à involution, L (resp. M) la Ω-préalgèbre (resp. Ω-algèbre) à involution libre pour $(B, \wedge)$.

L est la sous-préalgèbre à involution engendrée par B dans M.

Preuve : L est le strict sous-espace affine de M engendré par B (VII. 4, Proposition). On applique ensuite XI. 4, Proposition 1.

Proposition 2 : Soit $(X, \wedge)$ un ensemble à involution, $(B, \wedge)$ le binaire à involution libre pour $(X, \wedge)$ (IX. 8, Théorème) et L la Ω-préalgèbre à involution libre pour (B, Ω) (proposition 1).

L est la Ω-préalgèbre à involution libre pour $(X, \wedge)$.

Preuve : Soit θ un morphisme de $(X, \wedge)$ dans la Ω-préalgèbre à involution F : il existe un unique morphisme ξ de $(B, \wedge)$ dans F qui prolonge θ et un unique morphisme Ψ de L dans F qui prolonge ξ donc θ .

Corollaire 2 : Soit X un ensemble, B le binaire libre pour X et L la Ω-préalgèbre libre pour B.

L est la Ω-préalgèbre libre pour X.

Corollaire 3 : Soit X un ensemble, X' une copie (distincte) de X, $Y = X \cup X'$ muni de l'involution $\wedge$: $x \longleftrightarrow x'$ et L la Ω-préalgèbre à involution libre pour $(Y, \wedge)$.

L est la Ω-préalgèbre à involution libre pour l'ensemble X.

Preuve : Si θ est une application X dans la Ω-préalgèbre F on étend θ à Y par $(x')\ \theta = \overline{(x)\ \theta}$ et θ respecte $\wedge$.

On adapte proposition 2 et ses deux corollaires pour construire les Ω-algèbres libres correspondantes.

Lemme 2 : Soit $(X, \wedge)$ un ensemble à involution, L (resp. M) la Ω-préalgèbre (resp. Ω-algèbre) à involution libre pour $(X, \wedge)$.
L est la sous-préalgèbre à involution engendrée par X dans M.

Preuve : XI. 4, Proposition 1 et Lemme 1.

La construction de proposition 2 s'adapte pour certaines catégories faisant intervenir des propriétés multiplicatives telles que : existence d'un neutre, associativité, commutativité...

En particulier :

Définition : Soit X un ensemble (non vide)
La Ω-préalgèbre associative, commutative, unitaire P libre pour l'ensemble X est la Ω-préalgèbre des prépolynômes de X sur Ω .

Par le lemme 2, P est plongée dans l'algèbre des polynômes de X sur Ω.
Un prépolynôme est un polynôme pour lequel la somme des coefficients est égale à 1.
La Ω-préalgèbre P des prépolynômes étant unitaire on observera que sa duale pour la disjonction (X. 6) est une Ω-algèbre.

XI. 7

Nous allons maintenant adapter à une préalgèbre la construction du chapitre IV.

Soit E un strict Ω-espace affine, $k \in E$, E_k le Ω-module associé (IV. 2) et $E_k \times \Omega$ le Ω-module produit (IV. 2, Lemme 1). On plonge le strict Ω-espace affine E dans $E_k \times \Omega$ en identifiant a et (a,1) ; alors (IV. 2, Lemme 2) l'élément (a,α') de $E_k \times \Omega$ s'écrit de façon unique : $a + k\,\alpha$ $(\alpha = \alpha' \dot{-} 1)$.

Lemme : Si l'élément x de $E_k \times \Omega$ s'écrit : $x = a_1 \varepsilon_1 + \ldots + a_n \varepsilon_n$ avec les a_i dans E, alors : $x = a + k\,\alpha$ avec :
$\alpha = \varepsilon_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \varepsilon_n \dot{-} 1$ et $a = x + k\,(\dot{-}\,\alpha) \in E$.

Ainsi : $(a + k\alpha) + (b + k\beta) = (a - k + b) + k(\alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1)$

$(a + k\alpha)\varepsilon = (a, k, \varepsilon, k) + k(\alpha\varepsilon \dot{+} \varepsilon \dot{-} 1)$.

On peut donc considérer $E_k \times \Omega$ comme le Ω-module de IV. 2, Lemme 1 avec les propriétés précédentes, ou encore comme l'ensemble produit $E_k \times \Omega$ qui pour les lois :

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a - k + b, \alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1)$$
$$(a, \alpha)\varepsilon = ((a, k, \varepsilon, k), \alpha\varepsilon \dot{+} \varepsilon \dot{-} 1) ,$$

est un Ω-module.

Par IV. 2, Lemme 4, $E_k \times \Omega$ est le Ω-module libre pour le strict Ω-espace affine E.

Considérons une involution $\wedge$ sur E qui vérifie K_3 (IV. 3) : E muni de l'opération affine : $(a, \hat{b}, \varepsilon, c)$ est un Ω-espace affine régulier. On étend cette involution à $E_k \times \Omega$ en posant :

$$\overbrace{a + k\alpha} = \hat{a} + \hat{k}\alpha$$

$E_k \times \Omega$ est alors un Ω-module à involution $\wedge$ (IV. 3, Lemme 2) ; c'est le Ω-module à involution libre pour le Ω-espace affine régulier E.

Théorème : Ω étant associatif et commutatif, soit E une Ω-préalgèbre à involution $\wedge$ et $k \in E$.

Le Ω-module $E_k \times \Omega$, ensemble des $a + k\alpha$ avec $a \in E$, $\alpha \in \Omega$, est une Ω-algèbre à involution pour :

$\overbrace{a + k\alpha} = \hat{a} + \hat{k}\alpha$

$(a + k\alpha)(b + k\beta) = ab + ak\beta + kb\alpha + k^2\alpha\beta$.

C'est la Ω-algèbre à involution libre pour la Ω-préalgèbre à involution E.

Preuve : $[(a-k+b) + k(\alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1)](c+k\gamma) =$

$= (a-k+b)c + (a-k+b)k\gamma + kc(\alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1) + k^2(\alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1)\gamma =$

$= (ac + ak\gamma + kc\alpha + k^2\alpha\gamma) + (bc + bk\gamma + kc\beta + k^2\beta\gamma)$.

De même à gauche.

$[(a, k, \varepsilon, k) + k(\alpha\varepsilon \dot{+} \varepsilon \dot{-} 1)](c + k\gamma) =$

$= (a, k, \varepsilon, k)c + (a, k, \varepsilon, k)k\gamma + kc(\alpha\varepsilon \dot{+} \varepsilon \dot{-} 1) + k^2(\alpha\varepsilon \dot{+} \varepsilon \dot{-} 1)\gamma =$

$= ac\varepsilon + ak\gamma\varepsilon + kc\alpha\varepsilon + k^2\alpha\gamma\varepsilon =$

$= [(a + k\alpha)(c + k\gamma)]\varepsilon$.

De même pour : $(a + k\alpha)[(c + k\gamma)]\varepsilon$.

Ainsi $E_k \times \Omega$ est une Ω-algèbre.

Vérifions K_4 :

$\widehat{(a + k\alpha)(b + k\beta)} = \widehat{ab} + \widehat{ak}\,\beta + \widehat{kb}\,\alpha + \widehat{k^2}\,\alpha\beta$.

Puisque $E_k \times \Omega$ est un Ω-module à involution.

C'est encore : $\hat{a}\,b + \hat{a}\,k\beta + \hat{k}\,b\alpha + \hat{k}\,k\alpha\beta$

soit : $\widehat{(a + k\alpha)}\,(b + k\beta)$

ou bien : $a\,\hat{b} + a\,\hat{k}\beta + k\,\hat{b}\alpha + k\,\hat{k}\alpha\beta$

soit : $(a + k\alpha)\,\widehat{(b + k\beta)}$.

Maintenant si θ est un morphisme de Ω-préalgèbre à involution de E dans la Ω-algèbre à involution A, l'application Ψ définie par :

$$(a + k\alpha)\,\psi = (a)\,\theta + (k)\,\theta\,\alpha \quad ,$$

est l'unique morphisme de Ω-module à involution de $E_k \times \Omega$ dans A qui étend θ . Or θ respectant le produit dans E, ψ respecte le produit dans $E_k \times \Omega$.

Corollaire : Toute Ω-préalgèbre à involution peut-être plongée dans une Ω-algèbre à involution.

Par oubli de l'involution on obtient :

Théorème bis : Ω étant associatif et commutatif, soit E une Ω-préalgèbre et $k \in E$.
Le Ω-module $E_k \times \Omega$ est une Ω-algèbre pour :
$(a + k\alpha)\,(b + k\beta) = ab + ak\beta + kb\alpha + k^2\alpha\beta$.
C'est la Ω-algèbre libre pour la Ω-préalgèbre E.

Corollaire bis : Toute Ω-préalgèbre peut être plongée dans une Ω-algèbre.

Lorsque $\Omega = Z$ les propriétés précédentes s'énoncent avec préanneau (resp. anneau) au lieu de Ω-préalgèbre (resp. Ω-algèbre).

Avec $\Omega = Z/n$ on obtient (voir X. 1, Proposition) :

Théorème ter : Soit E un préanneau de caractéristique n et $k \in E$:
$E_k \times Z/n$ muni du produit :
$(a + k\alpha)\,(b + k\beta) = ab + ak\beta + kb\alpha + k^2\alpha\beta$
est l'anneau de caractéristique n libre pour E.

Corollaire ter : Tout préanneau de caractéristique n peut être plongé dans un anneau de caractéristique n.

Proposition : Soit E une Ω- préalgèbre.

La Ω-algèbre $E_k \times \Omega$ du théorème bis est commutative (resp. associative, unitaire) si et seulement si il en est ainsi pour E.

Preuve : Pour commutativité et associativité c'est nécessaire puisque E est plongé dans $E_k \times \Omega$; on vérifie que c'est suffisant.

Soit $u + k\varepsilon$ neutre à droite dans $E_k \times \Omega$:

$$a = a\,(u + k\varepsilon)$$
$$= a\,u + a\,k\varepsilon$$
$$= (a\,u + a\,k\varepsilon - k\varepsilon) + k\varepsilon$$

impose $\varepsilon = \omega$ et donc u neutre à droite dans E. Si u est neutre à droite dans E :

$$(a + k\alpha)\,u = a + k\alpha \quad .$$

En particulier si E est une Ω-préalgèbre associative les propriétés précédentes permettent de retrouver d'une autre façon la proposition 42 de [JP].

XI. 8

Soit Q un ensemble muni d'une structure des chapitres précédents et $\mathcal{R}'$ une partie de Q^2 : on sait (Cohn : Universal algebra) qu'il existe une congruence $\mathcal{R}$ pour Q engendrée par $\mathcal{R}'$.

Soit F un Ω-espace affine régulier et Q la Ω-préalgèbre à involution libre pour l'ensemble F à involution barre (X. 6, Proposition 2). On note :
(a, b, ε, c) (resp. $[a, b, \varepsilon, c]$) l'opération affine pour le strict Ω-espace affine F (resp. Q).
Soit $\mathcal{R}'$ l'ensemble des $([a, b, \varepsilon, c], (a, b, \varepsilon, c))$ pour a,b,c parcourant F et ε parcourant Ω, $\mathcal{R}$ la congruence sur Q engendrée par $\mathcal{R}'$ et $L = Q/\mathcal{R}$.

Proposition 1 : Avec les notations précédentes L est la Ω-préalgèbre à involution libre pour le Ω-espace affine régulier F.

F se plonge dans L.

Preuve : Soit θ un morphisme de F dans une Ω-préalgèbre à involution P : il existe un unique morphisme Ψ de préalgèbre de Q dans P qui étend θ, comme application qui respecte l'involution. D'autre part :

$$([a, b, \varepsilon, c])\,\Psi = ((a)\,\theta\ ,\ (b)\,\theta\ ,\ \varepsilon\ ,\ (c)\,\theta)$$
$$= ((a, b, \varepsilon, c))\,\theta$$
$$= ((a, b, \varepsilon, c))\,\psi$$

donc il existe un unique morphisme ξ de Ω-préalgèbre à involution de L dans Q qui étend le morphisme de Ω-espace affine θ.
On justifie la dernière assertion par le lemme suivant :

Lemme : Soit F un Ω-espace affine régulier.
Il existe une Ω-algèbre à involution et associative A et un morphisme injectif de Ω-espace affine de F dans A.

Preuve : F se plonge dans le Ω-module à involution $F_k \times \Omega$ (XI. 7) qui est canoniquement une Ω-algèbre (à involution et associative) en pointant sur le zéro (X. 9).

La construction précédente s'applique avec oubli de l'involution et s'adapte à l'hypothèse supplémentaire d'associativité pour la catégorie des Ω-préalgèbres considérées. Pour un strict Ω-espace affine on peut sans inconvénient ajouter l'hypothèse d'existence d'un élément neutre pour la catégorie des Ω-préalgèbres considérées.
En particulier :

Définition 1 : Soit E un strict Ω-espace affine.
La Ω-préalgèbre associative unitaire libre pour E est la Ω-préalgèbre prétensorielle pour le strict Ω-espace affine E.

Si $E = \{x\}$, la Ω-préalgèbre prétensorielle est la Ω-préalgèbre associative unitaire libre pour l'ensemble E, c'est-à-dire la Ω-préalgèbre des prépolynômes en x.

Proposition 2 : Soit F un Ω-espace affine régulier et L la Ω-préalgèbre à involution de proposition 1.
$L_k \times \Omega$ (XI. 7) est la Ω-algèbre à involution libre pour le Ω-espace affine régulier F.

Preuve : Proposition 1 et XI. 7, Théorème.

La Ω-algèbre à involution libre pour F peut encore être obtenue par la méthode de la proposition 1, Q étant alors la Ω-algèbre à involution libre pour l'ensemble F.

Corollaire : Soit F un Ω-espace affine régulier, L (resp. M) la Ω-préalgèbre (resp. Ω-algèbre) à involution libre pour F.
L est la sous-préalgèbre à involution engendrée par F dans M.

Proposition 2 et Corollaire s'appliquent avec oubli de l'involution et aussi sous les hypothèses d'associativité ou d'existence d'un élément neutre (XI. 7, Proposition).

Définition 2 : Soit E un strict Ω-espace affine.
La Ω-algèbre associative unitaire libre pour E est la Ω-algèbre tensorielle pour le strict Ω-espace affine E.

Par le corollaire la Ω-préalgèbre prétensorielle pour E est la Ω-préalgèbre engendrée par E dans la Ω-algèbre tensorielle pour E.

Soit F_k un Ω-module à involution de zéro k, M la Ω-algèbre à involution libre pour le Ω-espace affine régulier F (proposition 2), $\mathcal{R}$ la congruence engendrée sur M en reliant k et le zéro de M et $N = M/\mathcal{R}$: N est la Ω-algèbre à involution libre pour le Ω-module F_k.
N peut être encore obtenue par la méthode de la proposition 1 en partant de la Ω-algèbre à involution libre pour l'ensemble à involution F, puis en reliant les sommes et aussi les produits externes...
F_k étant canoniquement une Ω-algèbre (à involution et associative) en pointant sur le zéro (X. 9), le plongement dans N est assuré.

Les propriétés que nous venons d'établir ouvrent la voie à une étude qui s'inspirerait des théories élaborées pour les modules. Dans ce contexte, une notion telle que celle d'application biaffine pourrait jouer un rôle important...

XI. 9

Soit E un strict Ω-espace affine et W l'ensemble des dilatations de E : lorsque Ω est commutatif, nous avons vu en XI. 2 que Hom(E, E) est une Ω-préalgèbre et en III. 10 que $W \subset \mathrm{Hom}(E, E)$; en fait W est une sous-préalgèbre de Hom(E, E), donc :

Proposition 1 : Lorsque Ω est commutatif, W est une Ω-préalgèbre associative unitaire avec un ensemble de zéros à droite équipotent à E.

On examine maintenant le cas général où Ω n'est pas nécessairement commutatif ; soit H le préanneau des endomorphismes du strict groupe ternaire E ; on vérifie que W est contenu dans H et en est un sous-préanneau, d'où :

Proposition 2 : L'ensemble W des dilatations du strict Ω-espace affine E est canoniquement un préanneau associatif unitaire avec un ensemble de zéros à droite équipotent à E.

Ce résultat complète celui de III. 10, Proposition 1.

Proposition 3 : Avec les notations de la Proposition 2 :

i) Si E est de caractéristique n , W est de caractéristique n.

ii) Si E est sans torsion, W est simplifiable (propriété vérifiée par tout élément non zéro à droite).

iii) Si Ω est un corps, W est un précorps associatif unitaire (tout élément autre qu'un zéro à droite est inversible).

Preuve : i) H s'identifie à la $\mathbb{Z}/_n$-préalgèbre des endomorphismes du $\mathbb{Z}/_n$-espace affine E ;

ii) toute dilatation non constante est injective donc simplifiable à droite ; on vérifie qu'elle est aussi simplifiable à gauche car Ω est sans diviseurs de zéro ;

iii) toute dilatation non constante est bijective.

On sait que pour tous x, y, z de E, a, b, c de W :

$$(x - y + z)\, a = x\, a - y\, a + z\, a$$
$$x\, (a - b + c) = x\, a - x\, b + x\, c$$
$$(x\, a)\, b = x\, (a\, b) \quad .$$

Nous avons là un exemple de structure prémodulaire que nous allons étudier maintenant.

Ω est un anneau associatif et commutatif d'unité 1 et de zéro ω.
Ses éléments sont notés : $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ...

XII. 1

On dit que l'ensemble P agit sur l'ensemble E s'il existe une application :
$(x, a) \in E \times P \to xa \in E$.
$x \in E$ est invariant (ou fixe) pour P si : $xa = x$ pour tout $a \in P$.
On note : Inv (E) l'ensemble des éléments de E invariants pour P.
E est P-invariant si Inv (E) = E.

Par la suite P est une Ω-préalgèbre d'éléments : a, b, c, d, e, h, k ... et E un strict Ω-espace affine d'éléments : t, u, v, x, y, z ...

Notation :

P_1 : $(x, y, \varepsilon, z)\, a = (xa, ya, \varepsilon, za)$
P_2 : $x(a, b, \varepsilon, c) = (xa, xb, \varepsilon, xc)$
P_3 : $(xa)\, b = x(ab)$
P_4 : e est neutre dans P et : $xe = x$.
P_5 : h est zéro dans P, $t \in E$ et : $xh = t$.

Sous l'hypothèse : E est un Ω-module :

M_1 : $(x \oplus y)\, a = xa \oplus ya$
M_2 : P est un anneau et : $x(a + b) = xa \oplus xb$
M_3 : $(x\, \varepsilon)\, a = (xa)\, \varepsilon$
M_4 : P est une Ω-algèbre et : $(xa)\, \varepsilon = x(a\, \varepsilon)$.

P étant un anneau unitaire avec $\Omega = Z$, un P-module est caractérisé par : M_1, M_2, P_3, P_4. Dans ce cas M_3 résulte de M_1 et M_4 de M_2 ou encore de P_3.

P étant un anneau, avec $\Omega = Z$, un P-pseudo-module est caractérisé par : M_1, M_2, P_3. La théorie des pseudo-modules se ramène à celle des modules (Bourbaki : livre 2, Chapitre 2, fin).

Nous avons étudié, Chapitre II, la structure de prémodule sur un anneau unitaire (II. 10 Définition) et montré qu'un prémodule est un module avec un automorphisme involutif.

Plus généralement nous allons considérer ici une Ω-préalgèbre P et un strict Ω-espace affine E avec les axiomes : P_1, P_2, P_3.

Un Ω-espace affine régulier F sera considéré comme un strict Ω-espace affine (sous-jacent) E avec une involution (barre) vérifiant K_3. Les axiomes P_1 et P_2 pour F s'exprimeront avec l'opération affine dans E ; nous imposerons de plus : K_2 $(\overline{xa} = \bar{x}\, a)$ pour l'action de P.

On va procéder par étapes.

XII. 2

Avec les notations du paragraphe précédent, E étant un Ω-module et P une Ω-algèbre de zéro h, sous M_1, M_2, M_3, M_4, P_3 (resp. —— et P_4) nous disons que E est un <u>P-pseudo-Ω-module</u> (resp. <u>P-Ω-module</u>).

Appliquons au contexte actuel la méthode qui ramène l'étude d'un pseudo-module à celle d'un module :
$P' = P \times \Omega$, avec la somme et la loi externe canoniques, et le produit :

$$(a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab + a\beta + b\alpha\ ,\ \alpha\beta)$$

est une Ω-algèbre unitaire (associative si P l'est) et dans laquelle P (resp. Ω) se plonge par : $a \to (a, \omega)$ (resp. $\varepsilon \to (h, \varepsilon)$) ; après plongement, un élément (a, α) de P' s'écrit simplement : $a + \alpha$.
Si E est un P-pseudo-Ω-module, alors c'est un P'-Ω-module pour l'action :

$$x(a + \alpha) = x\,a \oplus x\,\alpha\ .$$

Soit E un Ω-module à involution $\wedge$; il vérifie donc :

$$\widehat{x \oplus y} = \hat{x} \oplus \hat{y} \quad ; \quad \widehat{x\,\varepsilon} = \hat{x}\,\varepsilon\ .$$

E est un <u>P-pseudo-Ω-module</u> (resp. <u>P-Ω-module</u>) <u>à involution</u> $\wedge$ si E est un P-pseudo-Ω-module (resp. P-Ω-module) avec K_2 : $\widehat{xa} = \hat{x}\, a$.

<u>Proposition</u> : Soit P une Ω-algèbre et E un P-pseudo-Ω-module à involution $\wedge$.
Il existe une algèbre unitaire P' telle que :
i) P se plonge dans P'.
ii) E est un P'-Ω-module à involution $\wedge$, l'action de P' sur E prolongeant celle de P.

Preuve : On reprend $P' = P \times \Omega$ définie précédemment :

$$\begin{aligned} \overbrace{x(a + \alpha)} &= \overbrace{x\ a \oplus x\ \alpha} \\ &= \overbrace{x\ a} + \hat{x}\ \alpha \\ &= \hat{x}\ a \oplus \hat{x}\ \alpha \\ &= \hat{x}(a + \alpha) \quad . \end{aligned}$$

XII. 3

Lemme 1 : M_1 et M_3 impliquent P_1 .
M_2 et M_4 impliquent P_2 .
En particulier, un P-pseudo-Ω-module vérifie P_1, P_2, P_3 .

Lemme 2 : Soit F un Ω-espace affine régulier et P un ensemble qui opère sur F.
Si Inv (E) n'est pas vide, c'est un sous-espace.

Preuve : P_1 et K_2 .

Lemme 3 : Soit P une Ω-préalgèbre et F un Ω-espace affine régulier P-invariant.
P_1, P_2, P_3 (P_4 si P est unitaire) et K_2 sont vérifiés.

Lemme 4 : Soit E un ensemble et P un binaire de zéro h qui agit sur E sous P_3 .
Inv (E) = $\{x\ h \ / \ x \in E\}$.

Proposition 1 : Soit P une Ω-algèbre de zéro h, F un Ω-espace affine régulier avec les axiomes : P_1, P_2, P_3, K_2, $u \in$ Inv (F) et N(u) l'ensemble des $x \in F$ pour lesquels : $x\ h = u$.
N(u) possède uns structure canonique de P-pseudo-Ω-module à involution.

Preuve : Raisonnons tout d'abord sur le strict Ω-espace affine E sous-jacent à F.
N(u) est un sous-module du Ω-module E_u puisque si : $x\ h = y\ h = u$:
$(x \oplus y)\ h = (x - u + y)\ h = u$
$(x\ \varepsilon)\ h = (x, u, \varepsilon, u)\ h = u$.

.../...

D'autre part P agit sur $N(u)$ puisque, si : $x\,h = u$, alors :

$(x\,a)\,h = x(a\,h) = x\,h = u$;

on a :

$$M_1 : (x \oplus y)\,a = x\,a - u + y\,a = x\,a \oplus y\,a$$

$$M_2 : x(a+b) = x(a - h + b) = x\,a - u + x\,b = x\,a \oplus x\,b$$

$$M_3 : (x\,\varepsilon)\,a = (x, u, \varepsilon, u)\,a = (x\,a, u, \varepsilon, u) = (x\,a)\,\varepsilon$$

$$M_4 : x(a\,\varepsilon) = x(a, h, \varepsilon, h) = (x\,a, u, \varepsilon, u) = (x\,a)\,\varepsilon$$

et enfin P_3.

On considère maintenant l'application :

$x \in N(u) \to \hat{x} = \bar{\bar{x}} - \bar{u} + u \in E$.

Par K_2 : $\bar{x}\,h = \overline{x\,h} = \bar{u}$ donc $\hat{x} \in N(u)$.

$\wedge$ est une involution sur $N(u)$ puisque :

$$\hat{\hat{x}} = (x - u + \bar{u}) - \bar{u} + u = x .$$

$$\widehat{x \oplus y} = \overline{x - u + y} - \bar{u} + u = (\bar{x} - \bar{u} + u) - u + (\bar{y} - \bar{u} + u) = \hat{x} \oplus \hat{y}$$

$$\hat{x}\,\alpha = (\bar{x} - \bar{u} + u) = \bar{x}\,\alpha - \bar{u}\,\alpha + u = \overline{x\,\alpha} - \bar{u} + u \quad , \quad \text{car } \bar{u}\,\alpha = \overline{u\,\alpha} = \bar{u} = \widehat{x\,\alpha}$$

$$\hat{x}\,a = (\bar{x} - \bar{u} + u)\,a = \overline{x\,a} - \bar{u} + u = \widehat{x\,a} .$$

Ainsi $N(u)$ est un P-pseudo-Ω-module à involution.

Théorème : Soit P une Ω-algèbre et F un Ω-espace affine régulier avec les axiomes P_1, P_2, P_3 et K_2 .
F est isomorphe au produit d'un P-pseudo-Ω-module à involution par un Ω-espace affine régulier P-invariant.

Preuve : Avec les notations de la proposition, on pose :

$F' = N(u) \times Inv\ (F)$.

F' est un Ω-espace affine régulier et, muni de l'action canonique de P, vérifie : P_1, P_2, P_3, K_2 (lemmes 1 et 3).

Soit ϕ : $y \in F \to (y - yh + u, yh) \in F'$ et

Ψ : $(x,v) \in F' \to y = x - u + v \in F$.

ϕ et Ψ sont réciproques donc ϕ est bijective.

Les opérations affines se rapportant aux stricts Ω-espaces affines sous-jacents on voit que :

$((y, y', \varepsilon, y'')) \phi = ((x, x', \varepsilon, x'), (v, v', \varepsilon, v''))$.

D'autre part :

$$(\bar{y})\ \phi = (\bar{y} - \bar{v} + u, \bar{v})$$
$$= (\overline{(y - v + u)} - \bar{u} + u, \bar{v})$$
$$= \widehat{(y - v + u, \bar{v})}$$
$$= \widehat{(y)\ \phi} \quad , \text{ en notant : } \widehat{(x,v)} = (\hat{x}, \bar{v})$$

Enfin pour l'action de P :

$$(y\ a)\ \phi = (y\ a - v + u, v)$$
$$= ((y - v + u)\ a, v\ a)$$
$$= (y)\ \phi\ a \ .$$

Soit E un strict Ω-espace affine vérifiant P_1, P_2, P_3 et $v \in Inv\ (E)$: l'image par ϕ (preuve du théorème) de $N(v)$ est l'ensemble des $(x, v) \in E'$ pour x parcourant $N(u)$; c'est canoniquement un P-pseudo-Ω-module isomorphe à $N(u)$. On passe de $N(u)$ à $N(v)$ par la translation $\mathcal{E}_{uv}$.

Corollaire 1 : Soit P une Ω-algèbre et F un Ω-espace affine régulier avec les axiomes : P_1, P_2, P_3 et K_2. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) F est un P-pseudo-Ω-module à involution barre.

ii) $Inv\ (F)$ a un unique élément.

iii) P_5 est vérifié.

Lorsque $\Omega = Z$ ou $\Omega = Z/n$, le théorème s'applique sous des hypothèses plus faibles puisque la loi ternaire : $a - b + c$ détermine l'opération affine : (a, b, ε, c).

Nous allons expliciter avec $\Omega = Z$. Les propriétés sont analogues pour Z/n en précisant chaque fois : "de caractéristique n".

Soit P un anneau et E un strict groupe ternaire. Si :

$$\begin{cases} P_{1'} & (x - y + z)\,a = xa - ya + za \\ P_{2'} & x(a - b + c) = xa - xb + xc \end{cases}.$$

Alors P_1 et P_2 sont vérifiés pour $\Omega = Z$.

Corollaire 2 : Soit P un anneau et F un groupe ternaire m-commutatif sous $P_{1'}$, $P_{2'}$, P_3, K_2.
F est isomorphe au produit d'un P-pseudo-module à involution par un groupe ternaire m-commutatif P-invariant.

Tout ce qui précède s'applique en introduisant l'axiome : P_4 et en oubliant : "Pseudo".
Dans le cas général envisagé nous avons la propriété :

Proposition 2 : Soit P une Ω-algèbre et F un Ω-espace affine régulier sous P_1, P_2, P_3, K_2.
P étant plongé dans la Ω-algèbre unitaire P' de XII. 2, il existe une action de P' sur F qui étend celle de P et vérifie les axiomes précédents plus P_4.

Preuve : Par XII. 2, Proposition, N(u) est un P'-Ω-module à involution ; l'action de P' sur N(u) vérifie donc (lemme 1) : P_1, P_2, P_3, K_2 et P_4.
L'action canonique de P' sur $F' = N(u) \times \mathrm{Inv}\,(F)$

$$(x, v)\,(a + \alpha) = (xa \oplus x\alpha\,,\ v)$$

vérifie ces mêmes axiomes (lemme 3).

XII. 4

Nous allons appliquer les résultats précédents à un Ω-module à involution.

Proposition 1 : Soit P une Ω-algèbre et E un Ω-module à involution $\wedge$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) P_1, M_2, M_4, P_3, K_2.
ii) E est un P-pseudo-Ω-module à involution $\wedge$.

Preuve : i) implique ii) : M_2 implique P_5 ; comme M_2 et M_4 impliquent P_2 (XII. 3, Lemme 1), on applique XII. 3, Corollaire 1.

ii) implique i) : XII. 3, Lemme 1.

Corollaire 1 : Soit P un anneau et E un groupe commutatif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $(x \ominus y \oplus z)\, a = xa \ominus ya \oplus za$
$x(a + b) = xa \oplus xb$
$(xa)b = x(ab)$

ii) E est un P-pseudo-module.

Proposition 2 : Soit P une Ω-algèbre et E un Ω-module à involution. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) M_1, M_3, P_2, P_3, K_2 .

ii) E est le produit d'un P-pseudo-Ω-module à involution par un Ω-module à involution P-invariant.

Preuve : Soit t l'origine du Ω-module E : par M_1, $t \in \mathrm{Inv}\,(E)$. Comme M_1 et M_3 impliquent P_1 (XII. 3, Lemme 1) on peut appliquer XII. 3, Théorème avec $u = t$.
t étant invariant pour l'involution sur E, on voit que N(t) et Inv (E) sont des sous-modules à involution de E.

Corollaire 2 : Soit P un anneau et E un groupe commutatif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $(x \oplus y)a = xa \oplus ya$
$x(a - b + c) = xa \ominus xb \oplus xc$
$(xa)b = x(ab)$

ii) E est le produit d'un P-pseudo-module par un groupe commutatif P-invariant.

Les résultats précédents admettent l'axiome : P_4, avec oubli de : "Pseudo".

XII. 5

Lemme : Soit E un Ω-espace pondéré sur lequel agit une Ω-préalgèbre P :

P_1 est équivalent à : $(\Sigma\, x_i\, \varepsilon_i)\, a = \Sigma\, (x_i\, a)\, \varepsilon_i$

P_2 est équivalent à : $x(\Sigma\, a_i\, \varepsilon_i) = \Sigma\, (x\, a_i)\, \varepsilon_i$

Preuve : VII. 3 et X. 4.

Soit P une Ω-préalgèbre qui agit par : xa , sur le Ω-espace affine régulier E et $t \in E$ fixe pour l'involution barre.
Soit Q la Ω-préalgèbre duale de P (X. 8) pour le nouveau produit :
$a \times b = a\alpha + b\alpha + ab(1 \dot{-} 2\alpha)$, avec α idempotent dans Ω.

Définition : L'action de Q sur E :
$x * a = x\alpha + ta\alpha + xa(1 \dot{-} 2\alpha)$
est appelée duale de celle de P.

On a : $t * a = t\alpha + ta(1 \dot{-} \alpha)$. Par suite :
$x\alpha + (t * a)\alpha + (x * a)(1 \dot{-} 2\alpha) = xa + t\alpha - ta\alpha$.
Ainsi l'action duale de celle de Q est xa si et seulement si $t a \alpha = t\alpha$ dans le Ω-module E_t. C'est le cas en particulier quand t est invariant pour P.

Sous-entendant qu'il s'agit de l'action de P (resp. Q) sur E, on dira simplement : "P (resp. Q) vérifie tel axiome".

Proposition : Avec les notations précédentes :
Si P vérifie : P_1, P_2, P_3, K_2 alors Q vérifie P_1, P_2, P_3, K_2.

Preuve :

$$P_1 : \Sigma (x_i * a)\varepsilon_i = (\Sigma x_i \varepsilon_i)\alpha + ta + (\Sigma x_i \varepsilon_i) a(1 \dot{-} 2\alpha)$$
$$= (\Sigma x_i \varepsilon_i) * a$$

$$P_2 : x * (\Sigma a_i \varepsilon_i) = x\alpha (\Sigma \varepsilon_i) + t(\Sigma a_i \varepsilon_i)\alpha + x(\Sigma a_i \varepsilon_i)(1 \dot{-} 2\alpha)$$
$$= \Sigma (x * a_i)\varepsilon_i$$

$$P_3 : (x * a) * b = x\alpha + t(a\alpha + b\alpha - ab\alpha) + x(-a\alpha - b\alpha + ab)$$
$$= x * (a \times b)$$

$$K_2 : \bar{x} * a = \bar{x}\alpha + \bar{t}a\alpha + \bar{x}a(1 \dot{-} 2\alpha)$$
$$= \bar{x}\alpha + \bar{t}a\alpha + \bar{x}a(1 \dot{-} 2\alpha)$$
$$= \bar{x}\alpha + \overline{ta}\alpha + \overline{xa}(1 \dot{-} 2\alpha)$$
$$= \overline{x * a}$$

Supposons qu'il existe une Ω-algèbre A parmi les duales de P : cette proposition permet d'appliquer XII. 3, Théorème qui détermine la structure de E pour l'action de A.

Si P est une Ω-algèbre de zéro h et E un P-pseudo-Ω-module de zéro t, alors h, zéro camouflé dans Q, vérifie :

$$x * h = x\alpha + t(1 \dot{-} \alpha).$$

Si P est une Ω-préalgèbre et E est invariant pour P alors :

$$x * a = x(1 \dot{-} \alpha) + t\alpha .$$

Proposition 2 : Soit (E, t) un strict Ω-espace affine pointé, P une Ω-préalgèbre qui agit sur E et Q la duale de P pour la disjonction avec l'action duale sur E.

i) Si P vérifie P_4 alors Q vérifie P_5.

ii) Si P vérifie P_5 alors Q vérifie P_4.

Preuve : $x * a = x + ta - xa$.

i) $ye = y$ pour tout $y \in E$ implique :

$$x * e = x + t - x = t .$$

ii) $yh = u$ pour tout $y \in E$ implique :

$$x * h = x + u - u = x .$$

XII. 6

Soit F un Ω-espace affine régulier et $t \in F$: on plonge F dans le Ω-module à involution : $F_t \times \Omega$, ensemble des : $x + t\alpha$ (XI. 7).

Proposition 1 : Soit P une Ω-préalgèbre et F un Ω-espace affine régulier avec les axiomes : P_1, P_2, P_3, K_2 .
L'action de P sur F s'étend à $F_t \times \Omega$ et vérifie : M_1, M_3, P_2, P_3, K_2 .

Preuve : On pose : $(x + t\alpha)\, a = xa + (ta)\, \alpha$.

M_1 : $(x + t\alpha + y + t\beta)\, a = (x - t + y)a + (t\, a)\, (\alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1) =$
$= x\, a - t\, a + y\, a + t\, a\, (\alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1) = (x + t\alpha)\, a + (y + t\beta)\, a$.

M_3 : $((x + t\alpha)\, \varepsilon)\, a = (x, t, \varepsilon, t)\, a + (ta)\, (\alpha\, \varepsilon \dot{+} \varepsilon \dot{-} 1) =$
$= (xa)\, \varepsilon + (ta)\, \alpha\, \varepsilon$
$= ((x + t\alpha)\, a)\, \varepsilon$

P_2 : $(x + t\alpha)\, (a, b, \varepsilon, c) = x(a, b, \varepsilon, c) + (t\, (a, b, \varepsilon, c))\, \alpha =$
$= (xa + (ta)\, \alpha)\, \varepsilon - (xb + (tb)\, \alpha)\, \varepsilon + xc + (tc)\, \alpha$

P_3 : $((x + t\alpha)\, a)\, b = ((xa + (ta)\alpha - t\alpha) + t\alpha)\, b$

$= xab + (tab)\alpha - (tb)\alpha + (tb)\alpha$

$= (x + t\alpha)(ab)$

K_2 : $\overbrace{(x + t\alpha)\, a} = \hat{x}\, a + (\overset{\wedge}{ta})\alpha$

$= \widehat{xa} + \widehat{ta}\,\alpha$

$= \overbrace{(x + t\alpha)\, a}$

Soit P une Ω-préalgèbre et $k \in P$: on plonge P dans la Ω-algèbre : $P_k \times \Omega$, ensemble des $a + k\alpha$ (XI. 7, Théorème bis).

Proposition 2 : Soit P une Ω-préalgèbre et M un Ω-module à involution avec les axiomes : M_1, M_3, P_2, P_3, K_2 .

L'action de P sur M s'étend en une action de $P_k \times \Omega$ avec les propriétés : M_1, M_2, M_3, M_4, P_3, K_2 .

Preuve : On pose : $x(a + k\alpha) = xa \oplus (xk)\alpha$.

M_1 : $(x \oplus y)(a + k\alpha) = xa \oplus ya \oplus (xk)\alpha \oplus (yk)\alpha$

$= x(a + k\alpha) \oplus y(a + k\alpha)$

M_2 : $x(a + k\alpha + b + k\beta) = x((a - k + b) + k(\alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1)) =$

$= x(a - k + b) + (xk)(\alpha \dot{+} \beta \dot{+} 1) = x(a + k\alpha) \oplus x(b + k\beta)$

M_3 : $(x\varepsilon)(a + k\alpha) = (x\varepsilon)\, a \oplus ((x\varepsilon)\, k)\alpha$

$= (xa \oplus (xk)\alpha)\varepsilon$

$= [x(a + k\alpha)]\varepsilon$

M_4 : $x((a + k\alpha)\varepsilon) = x(a, k, \varepsilon, k) \oplus (xk)(\alpha\varepsilon \dot{+} \varepsilon \dot{-} 1) =$

$= (xa)\varepsilon \oplus (xk)\alpha\varepsilon = (x(a + k\alpha))\varepsilon$

P_3 : $(x(a + k\alpha))(b + k\beta) = (xa \oplus (xk)\alpha)\, b \oplus ((xa \oplus (xk)\alpha)\, k)\beta =$

$= xab \oplus (xkb)\alpha \oplus (xak)\beta \oplus (xk^2)\alpha\beta = x((a + k\alpha)(b + k\beta))$

K_2 : $\hat{x}(a + k\alpha) = \hat{x}\, a \oplus (\overset{\wedge}{xk})\alpha$

$= xa \oplus xk\alpha$

$= \overbrace{x(a + k\alpha)}$

Proposition 3 : Soit P une Ω-préalgèbre et F un Ω-espace affine régulier avec les axiomes P_1, P_2, P_3 et K_2 :
P se plonge dans une Ω-algèbre A et F se plonge dans un A-pseudo-Ω-module à involution M, l'action de A sur M prolongeant celle de P sur F.

Preuve : Propositions 1 et 2.

Théorème : Soit P une Ω-préalgèbre et F un Ω-espace affine régulier avec les axiomes P_1, P_2, P_3 et K_2 :
P se plonge dans une Ω-algèbre unitaire A' et F se plonge dans un A'-Ω-module à involution M', l'action de A' sur M' prolongeant celle de P sur F.

Preuve : Proposition 3 et XII. 3, Proposition 2.

Corollaire : Soit P une Ω-préalgèbre et E un strict Ω-espace affine avec les axiomes P_1, P_2, P_3 :
P se plonge dans une Ω-algèbre unitaire A' et E se plonge dans un A'-Ω-module M', l'action de A' sur M' prolongeant celle de P sur E.

En particulier si P est un préanneau et E un strict groupe ternaire sous :

$$(x - y + z)\, a = xa - ya + za$$
$$x(a - b + c) = xa - xb + xc$$
$$(xa)\, b = x(ab)$$

alors P se plonge dans un anneau unitaire A' et E se plonge dans un A'-module, l'action de A' prolongeant celle de P.

Les résultats précédents résolvent le problème du plongement.
Ceci est fondamental du point de vue théorique, mais en pratique on aura bien souvent intérêt à faire une étude directe.
Nous allons maintenant étudier directement les préalgèbres qui contiennent un idempotent.

XIII. 1

Soit P (resp. Q) un strict Ω-espace affine d'éléments : a, b, c... (resp. : x, y, z...) avec l'élément distingué : h (resp. t). P et Q sont couplés si P agit sur Q et Q agit sur P, ces actions vérifiant P_1 et P_2 (XII. 1). On peut supposer sans restreindre la généralité (voir par exemple X. 9, Proposition 2) que P et Q sont des Ω-préalgèbres : ab (resp. xy) est le produit dans P (resp. Q), ax (resp. xa) est l'image de (a, x) (resp. (x, a)) par l'action de Q sur P (resp. P sur Q).

Etant donné a, b (resp. x, y) notons I un ensemble (d'indices) équipotent à l'ensemble des éléments suivants de P (resp. Q) :
a, b, h, ab, ah, ba, bh, ha, ay, at, bx, bt, hx, hy, ht (resp. x, y, t, xy, xt, yx, yt, tx, ty, xb, xh, ya, ta, tb, th),
et u_i (resp. v_i) l'image de i par la bijection.
Soit A le strict Ω-espace affine produit de P par Q et soit des α_i (resp. β_i) dont la somme est 1 dans Ω: on munit A de la loi binaire :

$$(a, x)\,(b, y) = (\Sigma\, u_i\, \alpha_i\, ,\, \Sigma\, v_i\, \beta_i) \quad .$$

Lorsque A est une Ω-préalgèbre on dit que c'est un produit couplé.

On vérifie que :

Lemme : Avec les hypothèses précédentes, si les α_i et les β_i sont dans le centre de Ω, la loi binaire sur A est distributive.

Nous venons de définir une méthode très générale de construction de Ω-préalgèbres : en effet non seulement la loi binaire sur A peut être choisie de nombreuses façons mais encore l'hypothèse que P et Q sont couplés n'est pas très contraignante (voir par exemple XII. 3, Lemme 3).

XIII. 2

On rappelle que la loi binaire : $a \vee b = a + b - ab$, sur une Ω-préalgèbre, est la disjonction (X. 6). Dans ce chapitre nous ferons souvent appel à la notion de dualité (X. 8) : il s'agira exclusivement de la dualité qui échange produit initial et disjonction.

Soit P et Q des Ω-préalgèbres couplées (XIII. 1) vérifiant :

C_1 : h est neutre à gauche dans P et t est zéro à gauche dans Q.

C_2 : $at = ah$ pour tout $a \in P$ et $xh = x \vee t$ pour tout $x \in Q$.

C_3 : $hx = h$ pour tout $x \in Q$ et $ta = t$ pour tout $a \in P$.

On munit A, produit des stricts Ω-espaces affines P et Q, de la loi binaire :

$$(a, x)\ (b, y) = (ab + ay - ah\ ,\ xy - xb + x \vee t).$$

Par XIII. 1, Lemme, A est une Ω-préalgèbre.

Lemme 1 : (h, t) est idempotent dans A.

Preuve : $(h, t)\ (h, t) = (hh + ht - hh\ ,\ tt - th + t \vee t)$

$= (h, t)$

Lemme 2 : i) $(h, t)\ (b, y) = (b, t)$

ii) $(h, t) \vee (b, y) = (h, y)$.

Preuve : i) $(h, t)\ (b, y) = (b + h - h\ ,\ t - t + t)$.

Soit F une Ω-préalgèbre et $z \in F$: z est g-associatif (resp. d-associatif) si pour tous u, v de F : $(zu)\ v = z(uv)$ (resp. $u(vz) = (uv)z$).

Cette propriété est conservée par dualité.

Lemme 3 : (h, t) est g-associatif dans A.

Preuve : Par Lemme 2, i) :

$[(h, t)\ (a, x)]\ (b, y) = (a, t)\ (b, y) = (ab + ay - ah\ ,\ t)$

$(h, t)\ [(a, x)\ (b, y)] = (ab + ay - ah\ ,\ t)$.

Lemme 4 : i) $(a, t)\ (b, t) = (ab, t)$

ii) $(h, x)\ (h, y) = (h, xy)$.

Preuve : i) $(a, t)\ (b, t) = (ab + ah - ah\ ,\ t - t + t)$

ii) $(h, x)\ (h, y) = (h + h - h\ ,\ xy - x \vee t + x \vee t)$

Lemme 5 : i) $(a, t)\ (h, y) = (ay, t)$

ii) $(h, x) \vee (b, t) = (h, xb)$.

Preuve : i) $(a,t)(h, y) = (ah + ay - ah , t - t + t)$

ii) $(h, x)(b, t) = (h + b - b - h + h , x + t - xt + xb - x \vee t)$.

Il résulte des lemmes 1, 2, 3, 4, 5, la :

Proposition 1 : Soient P et Q des Ω-préalgèbres couplées vérifiant C_1, C_2, C_3 et A le produit couplé pour la loi binaire :
$(a, x)(b, y) = (ab + ay - ah , xy - xb + x \vee t)$.
$\mathbf{k} = (h, t)$ est idempotent et g-associatif dans A.
L'ensemble P' (resp. Q') des ku (resp. $k \vee u$) est une sous-préalgèbre de A isomorphe à P (resp. Q).
Par ces isomorphismes l'image de l'action de Q sur P (resp. P sur Q) est le produit (resp. la disjonction) à droite dans A.

Notant :
C'_1 : h est neutre à droite et t zéro à droite,
C'_2 : $at = ha$ et $xh = t \vee x$,
on démontre de même :

Proposition 2 : Soient P et Q des Ω-préalgèbres couplées vérifiant C'_1, C'_2, C_3 et A le produit couplé pour la loi binaire :
$(a, x)(b, y) = (ab + bx - hb , xy - ya + t \vee y)$.
$k = (h, t)$ est idempotent et d-associatif dans A.
L'ensemble P' (resp. Q') des uk (resp. $u \vee k$) est une sous-préalgèbre de A isomorphe à P (resp. Q).
Par ces isomorphismes l'image de l'action de Q sur P (resp. P sur Q) est le produit (resp. la disjonction) à gauche dans A.

XIII. 3

Soit A une Ω-préalgèbre (non nécessairement associative), k idempotent, g-associatif, dans A, P l'ensemble des ku et Q l'ensemble des $k \vee u$.

Lemme 1 : P et Q sont des sous-espaces affines de A.
Le strict Ω-espace affine A est isomorphe à leur produit.

Preuve : Pour les Ω-modules : $A_k = P_k \oplus Q_k$ (somme directe).

Lemme 2 : i) P est une sous-préalgèbre de A et k est neutre à gauche dans P.

ii) Q est une sous-préalgèbre de A et k est zéro à gauche dans Q.

Preuve : i) résulte de l'hypothèse sur k. Donc P est stable pour la disjonction ; alors par dualité on obtient ii).

On remarquera que si e est neutre à droite dans A alors : $e = k \vee e \in Q$; en particulier si A est unitaire, Q est unitaire. Dualement, un zéro éventuel de A est dans P.

Par convention dans un préanneau $(ab) \vee c$ et $a \vee (bc)$ s'écrivent sans parenthèses.

Lemme 3 : i) Q agit sur P par le produit à droite.

ii) P agit sur Q par la disjonction à droite.

Ces actions vérifient P_1, P_2, C_2, C_3 .

Preuve : k étant g-associatif, P (resp. Q) est stable pour le produit (resp. la disjonction) à droite.

P_1 et P_2 résultent de la distributivité à droite.

C_2 est évident.

Vérifions C_3 : $k(k \vee u) = k$ et $k \vee ku = k$.

Les lemmes 2 et 3 permettent de considérer la Ω-préalgèbre A' de XIII. 2, Proposition 1, produit couplé des Ω-préalgèbres P et Q. Par le lemme 1 l'application θ de A dans A' :

$$\theta : u \in A \to (ku , k \vee u) \in A'$$

est un isomorphisme de strict Ω-espace affine.

Lemme 4 : θ est un isomorphisme de Ω-préalgèbres.

Preuve : $(ku, k \vee u)(kv, k \vee v)$ vaut :

$((ku)(kv) + ku(k \vee v) - kuk, (k \vee u)(k \vee v) - k \vee u \vee kv + k \vee u \vee k)$

c'est-à-dire : $(kuv, k \vee uv)$.

Ainsi :

Théorème : Toute Ω-préalgèbre contenant un idempotent g-associatif est isomorphe à un produit couplé de Ω-préalgèbres dont l'une contient un neutre à gauche et l'autre un zéro à gauche.

Corollaire : Toute Ω-préalgèbre associative contenant un idempotent est isomorphe à un produit couplé de Ω-préalgèbres associatives dont l'une contient un neutre à gauche et l'autre un zéro à gauche.

On peut énoncer un théorème et un corollaire analogues en remplaçant gauche par doite : P est alors la sous-préalgèbre des uk , Q la sous-préalgèbre des $u \vee k$ et on applique la construction de XIII. 2, Proposition 2.

XIII. 4

Soit F une Ω-préalgèbre et $z \in F$: z est un élément central gauche (resp. droit) s'il est g-associatif (resp. d-associatif) et s'il vérifie pour tout $u \in F$:

$$u(zu) = zuu - zuz + uz \quad \text{(resp. } (uz)u = uuz - zuz + zu\text{)}.$$

Proposition 1 : Soit A le produit couplé de XIII. 2, Proposition 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) k est central gauche dans A.

ii) $ax = ah$ et $xa = x \vee t$ pour tout $a \in P$ tout $x \in Q$.

iii) A est le produit (classique) des Ω-préalgèbres P et Q.

Preuve : i) implique ii) : Par hypothèse k vérifie :
$u(ku) = kuu - kuk + uk$ donc $k(u(ku)) = k(kuu) - k(kuk) + (uk)$, c'est-à-dire :
$(ku)(ku) = kuu$.
On en déduit : $ku(k \vee u) = kuk$ et $(k \vee u) \vee ku = k \vee u \vee k$, ce qui implique ii) puisque si $u = (a, x)$, $ku = (a, t)$ et $k \vee u = (h, x)$ (XIII. 2, Lemme 2).

ii) implique iii) : XIII. 2, Proposition 1.

iii) implique i) : h (resp. t) est central à gauche dans P (resp. Q).

D'une façon générale soient P et Q des Ω-préalgèbres vérifiant C_1 : on considère l'action de Q sur P (resp. P sur Q) définie par : $ax = ah$ (resp. $xa = x \vee t$) pour tout $a \in P$, tout $x \in Q$. Il est clair que P et Q sont

couplés et vérifient C_2 et C_3 ; leur produit couplé A de XIII. 2, Proposition 1 est leur produit classique. Bien entendu A est associative si et seulement si P et Q le sont.

Compte tenu de propostion 1 et de XIII. 3, Théorème :

Théorème 1 : Toute Ω-préalgèbre qui contient un idempotent central gauche est isomorphe au produit (classique) d'une Ω-préalgèbre avec un neutre à gauche par une Ω-préalgèbre avec un zéro à gauche.

Enoncé analogue en échangeant gauche et droite.

Soit A une Ω-préalgèbre et $k \in A$, idempotent, g-associatif et vérifiant :
(cg) : $u(kv) = kuv - kuk + uk$ pour tous u, v de A.
Sous cette hypothèse, apparemment plus forte que "central gauche", la démonstration du théorème 1 se fait directement :

$$(ku)(kv) = k(u(kv))$$
$$= k(kuv) - k(kuk) + kuk$$
$$= kuv .$$

$$(k \vee u)(k \vee v) = (k + u - ku)(k + v - kv)$$
$$= k + uk + uv - u(kv) - kuk - kuv + (ku)(kv)$$
$$= k + uv - kuv$$
$$= k \vee uv .$$

La méthode que nous avons suivie par l'intermédiaire du produit couplé est plus puissante puisqu'en fait "k central gauche" implique "k vérifie (cg)" (en effet, h dans P et t dans Q, vérifient (cg)).

Soit F une Ω-préalgèbre et $z \in F$: z est central si pour tout $u \in F$: $zu = uz$; nous dirons que z est central fort, s'il est central et si de plus : $(zu)u = z(uu) = (uz)u = u(zu) = (uu)z = u(uz)$.

Lemme : Pour un idempotent central :
Les propriétés : central gauche, central droit et central fort, sont équivalentes.

Preuve : On a alors : $zuz = zzu = zu = uz$.

Proposition 2 : Soit A le produit couplé de XIII. 2, Proposition 1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) k est central fort dans A.

ii) h est neutre dans P, t est zéro dans Q et A est le produit : $P \times Q$.

Preuve : i) implique ii) : k étant central, h est neutre dans P et t est zéro dans Q. D'autre part le lemme permet d'appliquer la proposition 1.

ii) implique i) : h (resp. t) est central fort dans P (resp. Q).

Théorème 2 : Toute Ω-préalgèbre qui contient un idempotent central fort est isomorphe au produit (classique) d'une Ω-préalgèbre unitaire par une Ω-algèbre.

Soit F une Ω-préalgèbre et $z \in F$: z est un élément associatif si pour tous u, v de F :
$(zu)v = z(uv)$; $(uz)v = u(zv)$; $(uv)z = u(vz)$.

Quand z est associatif, on a en particulier :
$(zu)u = z(uu)$; $(uz)u = u(zu)$; $(uu)z = u(uz)$.
Si de plus z est central, toutes ces quantités sont égales donc z est central fort ; ainsi : associatif et central impliquent central fort.
Réciproquement, dans le cas des idempotents, le théorème 2 montre que central fort implique associatif et central puisqu'il en est ainsi pour h dans P et t dans Q.

Corollaire du théorème 2 : Toute Ω-préalgèbre associative qui contient un idempotent central est isomorphe au produit d'une Ω-préalgèbre associative unitaire par une Ω-algèbre associative.

Pour $\Omega = Z$, on retrouve la proposition 25 [JP] établie par Pierre Janin pour les préanneaux associatifs.

XIII. 5

Soit F une Ω-algèbre de zéro t et M un Ω-module de zéro h.

Définition : M est un F-pseudo-Ω-module généralisé s'il existe une action de F sur M qui vérifie :
M_1, M_2, M_3, M_4 (XII. 1).

Un F-pseudo-Ω-module généralisé est un F-pseudo-Ω-module (XII. 2) avec oubli de P_3 pour l'action de F.

Lemme 1 : M est un F-pseudo-Ω-module généralisé si et seulement si l'action de F sur M vérifie :
P_1, P_2,
P_5 : $at = h$ pour tout $a \in M$
P_6 : $hx = h$ pour tout $x \in F$.

Preuve : C'est XII. 3, Corollaire 1 où P_6 remplace P_3.

Reprenons maintenant la construction de XIII. 2, Proposition 1.

Proposition 1 : Si k est zéro à droite dans A, Q est une Ω-algèbre, P est un Q-pseudo-Ω-module généralisé et h est zéro à droite dans P.

Preuve : k étant zéro à droite dans A est aussi zéro à droite dans P et Q ; alors Q est une Ω-algèbre.
L'action de Q sur P vérifie P_1 et P_2, P_5 car : $ak = k$ et P_6 par C_3.

Lorsque k est zéro à droite dans A, la loi binaire s'écrit encore :

$$(a, x)\,(b, y) = (ab \oplus ay\ ,\ xy - xb + x)$$

$\oplus$ étant la somme dans le Ω-module P.
Posant $u = (a, x)$, on voit que : $u(ku) = (a^2, x \ominus xa)$.
Par conséquent la condition : $u(ku) = ku$ pour tout $u \in A$ est équivalente à P est idempotent et agit sur Q par l'action identique : $xa = x$.

Soit F une Ω-préalgèbre et $z \in F$: z est un zéro à droite fort s'il est zéro à droite et si pour tous u, v de F : $u(zv) = zv$.

Lemme 2 : Soit F une Ω-préalgèbre avec z zéro à droite fort :

i) L'ensemble des zéros à droite de F est l'ensemble des zu.

ii) Si de plus z est g-associatif (XIII. 2) alors tout zéro à droite de F est fort.

Preuve : i) zu est zéro à droite par définition.
Si z' est un zéro à droite, alors $zz' = z'$.

ii) $z'u = (zz')u = z(z'u)$ est zéro à droite.

On voit que, pour un zéro à droite, les propriétés fort et g-associatif sont équivalentes à associatif.

Reprenons la construction de XIII. 2, Proposition 1 et supposons que k soit zéro à droite fort dans A : P peut alors être identifié à l'ensemble des zéros à droite de A (lemme 2), par conséquent la loi binaire sur P est $ab = b$ et l'action de P sur Q (associée à la disjonction à droite dans A) est l'identité : $xa = x$.
Dans ces conditions la loi binaire sur A s'écrit :

$$(a, x)(b, y) = (b \oplus ay , xy)$$

et les hypothèses initiales sur P et Q peuvent être simplifées.

Proposition 2 : Soit Q une Ω-algèbre de zéro t et P un Q-pseudo-Ω-module généralisé de zéro h.
Le strict Ω-espace affine produit A avec la loi binaire :

$$(a, x)(b, y) = (b \oplus ay , xy)$$

est une Ω-préalgèbre.
$k = (h, t)$ est zéro à droite fort et g-associatif dans A.
P est isomorphe au sous-espace affine des zéros à droite de A, pointé en k.
Q est isomorphe à la sous-algèbre des $k \vee u$.
Par ces isomorphismes l'action de Q sur P est le produit à droite dans A.

Preuve : On fait de P une Ω-préalgèbre en le munissant du produit zéro à droite : $ab = b$ (X. 9, Proposition 5).
On fait agir P sur Q par l'action identique : $xa = x$.
Ainsi P et Q sont couplés et vérifient C_1, C_2, C_3 .

.../...

On peut alors appliquer XIII. 2, Proposition 1.
Soit $u = (a, x)$ et $v = (b, y)$: $u(kv) = (a, x)(b, t) = (b, t) = kv$,
donc k est zéro à droite fort.

Compte tenu des commentaires précédents et de XIII. 4, théorème, on voit que réciproquement :

Théorème 1 : Soit A une Ω-préalgèbre contenant un zéro à droite fort et g-associatif :
Il existe une Ω-algèbre Q et un Q-pseudo-Ω-module généralisé P pour lesquels A est isomorphe au strict Ω-espace affine produit $P \times Q$, muni de la loi binaire distributive :

$$(a, x)(b, y) = (b \oplus ay, xy).$$

Proposition 3 : Soit A la Ω-préalgèbre de la proprosition 2 :
A est associative si et seulement si Q est associative et P est un Q-pseudo-Ω-module.

Preuve : $[(a, x)(b, y)](c, z) = (c \oplus bz \oplus (ay)z, (xy)z)$
$(a, x)[(b, y)(c, z)] = (c \oplus bz \oplus a(yz), x(yz))$

Théorème 2 : Soit A une Ω-préalgèbre associative contenant un zéro à droite :
Il existe une Ω-algèbre associative Q et un Q-pseudo-Ω-module P pour lesquels A est ismorphe au strict Ω-espace affine produit $P \times Q$, muni de la loi binaire distributive :

$$(a, x)(b, y) = (b \oplus ay, xy).$$

XIII. 6

On considère la construction de XIII. 2, Proposition 1 : Soit P' la Ω-préalgèbre duale de P.

Proposition 1 : Si k est neutre à droite dans A, P' est une Ω-algèbre, Q est un P'-pseudo-Ω-module généralisé et t est neutre à droite dans Q.

Preuve : k étant neutre à droite dans A est aussi neutre à droite dans P et

Q ; alors P est unitaire et P' est une Ω-algèbre.
L'action de P' sur Q (qui est aussi celle de P) vérifie P_1, P_2, P_5 car dans A : $a \vee k = k$ et P_6 par C_3.

Lorsque k est neutre à droite dans A, la loi binaire sur A s'écrit encore :

$$(a, x)\,(b, y) = (ab + ay - a\ ,\ xy \ominus xb)\ .$$

Soit F une Ω-préalgèbre et $z \in F$: on voit qu'un zéro à droite fort est encore caractérisé par : $u \vee (zv) = u$, pour tous u, v de F. Dualement z est neutre à droite fort si $u(z \vee v) = u$.
Si z est neutre à droite fort, l'ensemble des neutres à droite de F est l'ensemble des $z \vee u$.

Supposons maintenant que k soit neutre à droite fort dans A : Q peut alors être identifié à l'ensemble des neutres à droite de A, par conséquent la loi binaire sur Q est $xy = x$ et l'action de Q sur P (associée au produit à droite dans A) est l'identité : $ax = a$.
Dans ces conditions la loi binaire sur A s'écrit :

$$(a, x)\,(b, y) = (ab,\ x \ominus xb),$$

le produit ab dans P étant aussi la disjonction dans la Ω-algèbre P'.

Proposition 2 : Soit P' une Ω-algèbre de zéro h et Q un P'-pseudo-Ω-module généralisé de zéro t.
Le strict Ω-espace affine produit A avec la loi binaire :

$$(a, x)\,(b, y) = (a \vee b,\ x \ominus xb)$$

est une Ω-préalgèbre.
$k = (h, t)$ est un neutre à droite fort et g-associatif dans A.
P' est isomorphe à la duale de la sous-préalgèbre unitaire des ku.
Q est isomorphe au sous-espace affine des neutres à droite de A, pointé en k.
Par ces isomorphismes l'action de P' sur Q est la disjonction à droite dans A.

Preuve : Soit A' le dual de A pour la disjonction : la loi binaire sur A' est : $(a, x)\,(b, y) = (ab,\ y \oplus xb)$.
Ainsi A' est construit par XIII. 5, Proposition 2.

Théorème 1 : Toute Ω-préalgèbre contenant un neutre à droite fort et g-associatif est isomorphe :
au strict Ω-espace affine produit d'une Ω-algèbre P' par un P'-pseudo-Ω-module généralisé,
avec la loi binaire distributive : $(a, x)\,(b, y) = (a \vee b,\ x \ominus xb)$.

Proposition 3 : Soit A la Ω-préalgèbre de la proposition 2 :
A est associative si et seulement si P' est associative et Q un P'-pseudo-Ω-module.

Preuve : La dualité conserve l'associativité (X. 8).

Théorème 2 : Toute Ω-préalgèbre associative contenant un neutre à droite est isomorphe :
au strict Ω-espace affine produit d'une Ω-algèbre associative P' par un P'-pseudo-Ω-module,
avec la loi binaire distributive : $(a, x)\,(b, y) = (a \vee b,\ x \ominus xb)$.

XIII. 7

Si F est une Ω-préalgèbre avec le produit $(a,b) \to ab$, on note F^0 la Ω-préalgèbre F pour le produit $(a,b) \to ba$.

On appelle quadruple les quatre objets B, C, D, E où B et C sont des Ω-algèbres associatives, D un B-pseudo-Ω-module et un C^0-pseudo-Ω-module, E un B^0-pseudo-Ω-module et un C-pseudo-Ω-module et pour lesquels il existe une application bilinéaire par rapport à Ω, de $E \times D$ dans B et une de $D \times E$ dans C.

Nous avons donc par hypothèse un certain nombre d'applications du type : $F \times G \to H$; l'image du couple (f, g) est notée fg. Dans le cas de l'action pour un pseudo-Ω-module nous convenons que : si F est une Ω-algèbre et G un F-pseudo-Ω-module (resp. F^0-pseudo-Ω-module) l'action de F sur G est considérée comme application : $G \times F \to G$ (resp. $F \times G \to G$).
Un quadruple généralisé est un quadruple avec oubli de l'associativité de B et C et de l'axiome P_3 pour leurs actions.

Soit B, C, D, E un quadruple généralisé : on note k les zéros de ces Ω-modules, A_k le Ω-module somme directe de B, C, D, E et A le strict Ω-espace

affine associé que l'on confond avec le produit des stricts Ω-espaces affines : B, C, D, E ensemble des (b, c, d, e) ; ainsi (k, k, k, k) est le zéro de A_k : on le note encore k.
Généralisant la méthode de XIII. 1 pour le produit couplé on peut définir sur A de très nombreuses lois binaires dont beaucoup sont distributives ; en particulier :

Lemme 1 : A muni de la loi binaire :

$$(b_1, c_1, d_1, e_1)\,(b_2, c_2, d_2, e_2) =$$
$$= (b_1b_2 \ominus e_1d_2,\ c_1 \vee c_2 \oplus d_1e_2,\ d_2 + d_1b_2 - c_1d_2,\ e_1 - e_1c_2 + b_1e_2)$$

est une Ω-préalgèbre.

La Ω-préalgèbre A du lemme 1 est le produit quadruplé généralisé de B, C, D, E. C'est lui que l'on considère dans les lemmes 2, 3 et 4 suivants :

Lemme 2 : Soit $u = (b, c, d, e) \in A$:

i) $ku = (k, c, d, k)$

ii) $uk = (k, c, k, e)$

iii) $k \vee u = (b, k, k, e)$

iv) $u \vee k = (b, k, d, k)$.

Lemme 3 : k est idempotent et associatif dans A.

Preuve : Par lemme 2, i) : $kk = (k, k, k, k) = k$.
Soit $u_i = (b_i, c_i, d_i, e_i)$ avec $i \in \{1, 2\}$; on vérifie que : $(ku_1)\,u_2$ et $k(u_1\,u_2)$ sont tous deux égaux à :
$(k,\ c_1 \vee c_2 \oplus d_1\,e_2\ ,\ d_2 + d_1\,b_2 - c_1\,d_2\ ,\ k)$.
$(u_1\,k)\,u_2$ et $u_1(ku_2)$ sont tous deux égaux à :
$(\ominus e_1\,d_2\ ,\ c_1 \vee c_2\ ,\ d_2 \ominus c_1\,d_2\ ,\ e_1 \ominus e_1\,c_2)$.
$(u_1\,u_2)k$ et $u_1(u_2k)$ sont tous deux égaux à :
$(k,\ c_1 \vee c_2 \oplus d_1\,e_2\ ,\ k\ ,\ e_1 - e_1\,c_2 + b_1\,e_2)$.
Il résulte en particulier du lemme 3 que pour tout $u \in A$:
$k(u \vee k) = ku \vee k$ et $k \vee uk = (k \vee u)k$.

Lemme 4 : Soit $u = (b, c, d, e) \in A$:

i) $k \vee u \vee k = b$

ii) $kuk = c$

.../...

iii) $k(u \vee k) = ku \vee k = d$

iv) $k \vee uk = (k \vee u)k = e$.

Compte tenu de ce qui précède, on vérifie que :

Proposition : Soit B, C, D, E un quadruple généralisé et A son produit quadruplé généralisé.

k est idempotent et associatif dans A.

On peut identifier :

B à la sous-algèbre des $k \vee u \vee k$,

C à la duale de la sous-préalgèbre unitaire des kuk,

D (resp. E) au sous-espace affine, pointé en k, des $ku \vee k$ (resp. $k \vee uk$.

Ceci étant :

L'action de B sur D (resp. E) devient le produit à droite (resp. à gauche) dans A.

L'action de C sur E (resp. D) devient la disjonction à droite (resp. à gauche) dans A.

L'application de $E \times D$ (resp. $D \times E$) dans B (resp. C) devient la disjonction (resp. le produit) dans A.

XIII. 8

Soit A une Ω-préalgèbre avec k idempotent et associatif, P la sous-préalgèbre des uk et Q la sous-préalgèbre des $u \vee k$ (XIII. 3 fin).
k est associatif et zéro à droite dans Q donc aussi zéro à droite fort : la construction de XIII. 6, théorème 1 s'applique avec la sous-algèbre B des $k \vee u \vee k$ et le sous-espace affine D, pointé en k, des zéros à droite de Q, c'est-à-dire des $k(u \vee k) = ku \vee k$.
k est associatif et neutre à droite dans P donc aussi neutre à droite fort : la construction de XIII. 6, théorème 1 s'applique avec la Ω-algèbre C duale de la sous-algèbre unitaire C' des kuk et le sous-espace affine E, pointé en k, des neutres à droite de P, c'est-à-dire des : $k \vee uk = (k \vee u)k$.

Lemme : B, C, D, E est un quadruple généralisé pour les applications de la proposition de XIII. 7 (ci-dessus).

Preuve : Les actions vérifient évidemment P_1 et P_2.
k étant neutre dans C, on a : $c \vee k = k$ (resp. $k \vee c = k$) c'est-à-dire P_6 pour l'action de C sur D (resp. E). k étant neutre à droite dans E, on a : $e \vee k = k$ d'où P_5 pour l'action de C sur E. Enfin d étant zéro à droite dans D, $k \vee d = k$, d'où P_5 pour l'action de C sur D.
Dualement P_5 et P_6 sont vérifiés pour les actions de B sur D et E.
L'application de $D \times E$ dans C définie par le produit dans A est bilinéaire car : $dk = ke = k$.
Dualement l'application de $E \times D$ dans B est bilinéaire.

On remarquera qu'un neutre (resp. zéro) éventuel dans A est dans B (resp. C).

k étant idempotent et associatif dans A, on vérifie que pour tous u, v de A : $(ku)(vk) = (kuv)k = k(uvk) = k(uv)k$ (on peut donc supprimer les parenthèses).
Par dualité : $(k \vee u) \vee (v \vee k) = k \vee u \vee v \vee k$.
Ensuite : $(u \vee k)(k \vee v) = k + uv - ukv$

$(kuk)(kvk) = k(ukv)k$.

De cette dernière égalité, on déduit par dualité :
$(k \vee u \vee k)(k \vee v \vee k) = k \vee [u + v - u \vee k \vee v] \vee k$.

Théorème : Toute Ω-préalgèbre contenant un idempotent associatif est isomorphe à un produit quadruplé généralisé.

Preuve : Soit A une Ω-préalgèbre avec l'idempotent associatif k. Par XIII. 3, lemme 1, le Ω-module A_k est somme directe des Ω-modules B, C, D, E.
Il reste à déterminer l'image de :
$(k \vee u \vee k,\ kuk,\ ku \vee k,\ k \vee uk)(k \vee v \vee k,\ kvk,\ kv \vee k,\ k \vee vk)$
par la loi binaire du lemme 1.

Première composante :

$$(k \vee u \vee k)(k \vee v \vee k) - (k \vee uk) \vee (kv \vee k) + k =$$
$$= k \vee [u + v - u \vee k \vee v - uk \vee kv + k] \vee k = k \vee uv \vee k .$$

Deuxième composante :

$$(kuk)(kvk) + (k(u \vee k))((k \vee v)k) - k =$$
$$= k\,[ukv + (u \vee k)(k \vee v) - k]\,k = k\ uv\ k .$$

Troisième composante : Posant : $v \vee k = y$, il vient :

$$ky + (ku \vee k)(k \vee y) - kuk \vee ky = k + kuy - kuk = kuv \vee k .$$

.../

Quatrième composante : Posant $k \vee u = x$, il vient :

$xk - xk \vee kvk + (x \vee k)(k \vee vk) = k + xvk - kvk = k \vee uv\,k$.

XIII. 9

On considère maintenant un quadruple B, C, D, E : les Ω-algèbres B et C sont associatives et les actions de B, B^0, C ou C^0 sur D ou E vérifient P_3. Soient x, y, z des éléments de $B \sqcup C \sqcup D \sqcup E$ (réunion d'ensembles disjoints) pour lesquels : (xy)z et x(yz) ont un sens ; on dit que xyz a un sens si $(xy)z = x(yz)$.
D'autre part le quadruple est muni de la dualité qui échange B et C, D et E, dans le produit quadruplé généralisé.
Ceci étant on dira que le quadruple B, C, D, E est fort si quels que soient $b \in B$, $c \in C$, $d \in D$, e et e' dans E :
bed, cdb, dbe, edb, ede',
et leurs duaux ont un sens.

Proposition : Soit B, C, D, E un quadruple généralisé et A son produit quadruplé généralisé.
La Ω-préalgèbre A est associative si et seulement si B, C, D, E est un quadruple fort.

Preuve : La condition est nécessaire : supposant A associative, il résulte immédiatement de XIII. 7, Proposition, que B, C, D, E est un quadruple.
Montrons qu'il est fort :
dbe a un sens car le produit dans A est associatif.
k étant zéro dans B on a : $eb = e$, $bd = d$ et $cb = c$ donc ebd, bed et cdb ont un sens.
Enfin puisque $ee' = e$, ede' a un sens.
Par dualité pour la disjonction on voit que les duaux ont un sens.
La condition est suffisante : on le vérifie en appliquant la loi binaire de XIII. 7, Lemme 1.

Appelons produit quadruplé (resp. fort), un produit quadruplé généralisé pour lequel le quadruple généralisé est un quadruple (resp. fort).

Théorème : Toute Ω-préalgèbre associative contenant un idempotent est isomorphe à un produit quadruplé fort.

XIII. 10

Soit F une Ω-algèbre et M un Ω-module de zéro k : on appelle action nulle de F sur M l'action de F sur M pour laquelle l'image de (a, x) est k quels que soient : $a \in F$, $x \in M$.

Lemme : Muni de l'action nulle de F sur M , M est un F-pseudo-Ω-module et un F^0-pseudo-Ω-module.

Soit maintenant B et C des Ω-algèbres, D et E des Ω-modules avec une application bilinéaire de $E \times D$ dans B et une de $D \times E$ dans C. Grâce à la notion d'action nulle on peut considérer que nous sommes en présence d'un quadruple généralisé (resp. quadruple lorsque B et C sont associatives). Le produit quadruplé généralisé définit une Ω-préalgèbre que nous allons caractériser.

Proposition 1 : Soit B, C, D, E un quadruple généralisé et A son produit quadruplé généralisé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Pour tous $b \in B$, $c \in C$, $d \in D$, $e \in E$: $db = cd$ et $ec = be$.

ii) Pour tout $u \in A$: $kuu = ku + uuk - uk$.

iii) Les actions de B et C sur D et E sont nulles.

Preuve : Soit $u = (b, c, d, e)$; par XIII. 7, Lemmes 1 et 2 :

$ku = (k, c, d, k)$

$uk = (k, c, k, e)$

$uuk = (k, c \vee c \oplus de, k, e - ec + be)$

$kuu = (k, c \vee c \oplus de, d + db - cd, k)$.

On voit alors que i) et ii) sont équivalents.

Sous l'hypothèse i) ou ii) la loi binaire sur A est :

$(b_1, c_1, d_1, e_1)(b_2, c_2, d_2, e_2) = (b_1b_2 \ominus e_1d_2, c_1 \vee c_2 \oplus d_1e_2, d_2, e_1)$.

On vérifie que, dans A :

$db = c \vee d = e \vee c = be = k$, d'où iii) (XIII. 7, Proposition).

On note Q_1 la propriété ii) de proposition 1.

XIII. 8, théorème montre que si A est une Ω-préalgèbre contenant un idempotent associatif k qui vérifie pour tout $u \in A$: $kuu = ku + uuk - uk$, alors A est isomorphe à un produit quadruplé généralisé sous l'hypothèse des actions nulles.

Soit B et C des Ω-algèbres, D (resp. E) un B et C-pseudo-Ω-module généralisé. On appelle application bilinéaire nulle de $E \times D$ dans B (resp. $D \times E$ dans C) l'application, évidemment bilinéaire par rapport à Ω, qui envoie tout couple sur le zéro.
On peut ainsi parler du quadruple généralisé : B, C, D, E.

Proposition 2 : Soit B, C, D, E un quadruple généralisé et A son produit quadruplé généralisé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) Les applications bilinéaires de $E \times D$ dans B et de $D \times E$ dans C sont nulles.
ii) Pour tout $u \in A$: $uku = ukuk + kuku - kuuk$.

Preuve : Soit $u = (b, c, d, e)$; par XIII. 7, Lemmes 1 et 2 :

$uku = (\ominus ed\ ,\ c \vee c\ ,\ d \ominus cd\ ,\ e \ominus ec)$
$ukuk = (k\ ,\ c \vee c\ ,\ k\ ,\ e \ominus ec)$
$kuku = (k\ ,\ c \vee c\ ,\ d \ominus cd\ ,\ k)$
$kuuk = (k\ ,\ c \vee c \oplus de\ ,\ k\ ,\ k)$

Lorsque les propriétés i) ou ii) précédentes sont vérifiées la loi binaire sur A s'écrit :
$(b_1, c_1, d_1, e_1)(b_2, c_2, d_2, e_2) = (b_1b_2, c_1 \vee c_2, d_1 + d_1b_2 - c_1d_2, e_1 - e_1c_2 + b_1e_2)$

On note Q_2 la propriété ii) de Proposition 2.

XIII. 11

Soit F un strict Ω-espace affine : nous avons vu en X. 9 que la loi produit zéro à gauche : $ab = a$ (resp. à droite : $ab = b$) est distributive. F muni de cette loi binaire sera appelé : Ω-préalgèbre zéro à gauche (resp. à droite).

Soient B et C des Ω-algèbres, D et E des Ω-modules : on considère les applications bilinéaires nulles de $E \times D$ dans B, $D \times E$ dans C et les actions

nulles de B et C sur D et E (XIII. 10). On voit que B, C, D, E est un quadruple généralisé ; si B et C sont associatives, c'est un quadruple fort (XIII. 9).

Proposition : Soit B, C, D, E un quadruple généralisé et A son produit quadruplé généralisé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Les actions et les applications bilinéaires sont nulles.

ii) k vérifie Q_1 et Q_2 (XIII. 10).

iii) Pour tout $u \in A$:

$$kuk = ku + uk - kuk - kuu - uuk - uku + kuku + ukuk + kuuk.$$

iv) A est le produit classique de :

la Ω-algèbre B,

la Ω-préalgèbre unitaire C' duale de C,

la Ω-préalgèbre zéro à droite D,

la Ω-préalgèbre zéro à gauche E.

Preuve : Pour alléger le i) nous avons sous-entendu que les actions sont celles de B et C sur D et E et les applications bilinéaires celles de $E \times D$ dans B et de $D \times E$ dans C.

Par XIII. 10, Propositions 1 et 2 : i) et ii) sont équivalentes.

Par XIII. 7, Lemme 1 : i) implique iv).

Sous l'hypothèse iv) et compte tenu des commentaires qui précèdent l'énoncé de la proposition : B, C, D, E est un quadruple généralisé et son produit quadruplé généralisé peut être identifié au produit classique des Ω-préalgèbres : B, C', D et E. iv) implique i) car dans A :

$db = be = de = e \vee d = c \vee d = e \vee c = k$.

Enfin pour permettre de montrer l'équivalence des propriétés précédentes avec iii), nous calculons dans le cas général, pour $u = (b, c, e, d)$:

$ku = (k, c, d, k)$

$uk = (k, c, d, e)$

$kuk = (k, c, k, k)$

$kuu = (k, c \vee c \oplus de, d + db - cd, k)$

$uuk = (k, c \vee c \oplus de, d, e - ec + be)$

$uku = (\ominus ed, c \vee c, d \ominus cd, e \ominus ec)$

$kuku = (k, c \vee c, d \ominus cd, k)$

$ukuk = (k, c \vee c, k, e \ominus ec)$

$kuuk = (k, c \vee c \oplus de, k, k)$

On note Q_3 la propriété iii) de proposition.

Théorème : Soit A une Ω-préalgèbre avec k idempotent, associatif et vérifiant (Q_1 et Q_2) ou Q_3.
A est ismorphe a un produit constitué par :
une Ω-algèbre,
une Ω-préalgèbre unitaire,
une Ω-préalgèbre zéro à droite,
une Ω-préalgèbre zéro à gauche.

Le lemme suivant permet d'appliquer ce théorème à toute π-préalgèbre idempotente qui contient un élément associatif :

Lemme : Soit A une Ω-préalgèbre idempotente et a un élément associatif de A :
i) Pour tout $b \in A$: $aba = ab + ba - bab$.
ii) Par conséquent a vérifie Q_3.

Preuve : Le carré de (ab + ba - bab) est égal à aba.

Dans [1], une étude directe nous a permis d'énoncer (théorème III. 5, de [1]) : Tout préanneau idempotent (les préanneaux considérés sont associatifs) est isomorphe à un produit de préanneaux constitué par :
un anneau booléen
un préanneau idempotent unitaire
un préanneau neutre à droite (zéro à gauche)
un préanneau neutre à gauche (zéro à droite).

Ici, par application des lemme et théorème précédents, on peut généraliser cet important résultat de structure au cas d'une Ω-préalgèbre idempotente qui contient un élément associatif.
Nous y reviendrons en XIV. 5, mais plutôt dans le contexte du paragraphe que voici.

XIII. 12

L'étude des préanneaux idempotents nous a conduit dans [2] à introduire la notion de préanneau zéro-neutre. Cette structure va nous permettre de donner une

nouvelle interprétation des résultats établis au paragraphe précédent.

Une Ω-préalgèbre est zéro-neutre si elle est associative, idempotente et vérifie : $aba = a$ pour tous a, b.
Par XIII. 11, lemme on a aussi : $a = ab + ba - b$ et donc $a \vee b \vee a = a$, pour tous a, b. En fait ces égalités sont équivalentes à : $aba = a$, comme le montre la :

Proposition : Toute Ω- préalgèbre zéro-neutre est uniquement isomorphe à un produit d'une Ω-préalgèbre zéro à droite par une Ω-préalgèbre zéro à gauche.

Preuve : Par XIII. 11 Lemme, on peut appliquer XIII. 11 théorème ; B et C étant triviaux, il reste le produit $D \times E$.
Cette décomposition est unique à un isomorphisme près comme le montre le lemme suivant :

Lemme 1 : Soit D (resp. E) une Ω-préalgèbre zéro à droite (resp. à gauche) et S le produit $D \times E$:
S est une Ω-préalgèbre zéro-neutre.
Quel que soit $k \in S$ la sous-préalgèbre des $ks \vee k = ks$ (resp. $k \vee sk = sk$) est isomorphe à D (resp. E).

Preuve : Si $k = (d_o, e_o)$ et $s = (d, e)$: $ks = (d, e_o)$ et $sk = (d_o, e)$.

Une Ω-préalgèbre est forte si elle contient un idempotent central fort (XIII. 4).
Une Ω-préalgèbre est forte si et seulement si elle est isomorphe au produit d'une Ω-algèbre par une Ω-préalgèbre unitaire. Il est remarquable que la décomposition de XIII. 11 théorème pour une Ω-préalgèbre forte se ramène toujours à ce cas simple.

Lemme 2 : Soit R une Ω-préalgèbre forte et $k \in R$, idempotent, associatif et vérifiant Q_3 :
Pour la décomposition de XIII. 11 en k, D et E sont triviaux. Par conséquent k est central fort.

Preuve : R contenant un élément central, D (resp. E) contient un élément central.

Théorème : Toute Ω-préalgèbre qui contient un idempotent associatif vérifiant Q_3, est uniquement isomorphe au produit d'une Ω-préalgèbre forte par une Ω-préalgèbre zéro-neutre.

Preuve : Compte tenu de XIII. 11, théorème, il reste à montrer que cette décomposition est unique à un isomorphisme près.
Soit $A = R \times S$ et $k = (r_o, s_o) \in A$, idempotent associatif et vérifiant Q_3 ; par le lemme 2, r_o est central fort dans R ; on vérifie alors que si $u = (r,s)$:
$k \vee u \vee k + kuk - k = (r, s_o)$
$ku \vee k + k \vee uk - k = (r_o, s)$.

Ce résultat généralise celui de [2] théorème V. 8 qui concerne le cas particulier des préanneaux idempotents (associatifs).

XIII. 13

Nous allons étendre les propriétés des paragraphes précédents en introduisant des involutions.

Soient P et Q des Ω-préalgèbres couplées vérifiant C_1, C_2, C_3 et C_4 : P est munie de l'involution : $a \to \bar{a}$, qui respecte K_3 et K_4 (X. 3).
Q est munie de l'involution : $x \to \hat{x}$ qui vérifie K_3 et :
$\overset{\wedge}{xy} = \hat{x}\hat{y}$; $\overset{\wedge}{xy} = \hat{x}\hat{y} - \hat{x}t + xt$;
C_5 : Pour P et Q les actions et les involutions sont reliées par :
$\bar{a}x = \overline{ax}$; $\overset{\wedge}{ax} = \overline{ax} - \overline{ah} + ah$
$\hat{x}a = \overset{\wedge}{xa}$; $x\bar{a} = \overset{\wedge}{xa} - \hat{x} + x$.

L'involution sur le strict Ω-espace affine P (resp. Q) vérifiant K_3, P (resp. Q) est un Ω-espace affine régulier. Comme de plus : $a \to \bar{a}$ vérifie K_4, P est une Ω-préalgèbre à involution (X. 3, Définition) ; on remarquera que h étant neutre à gauche dans P, l'involution sur P est déterminée par $\bar{h}$: $\bar{a} = \bar{h}a$.

Lemme 1 : L'involution $\wedge$ dans Q est fixe sur t.

Preuve : On applique : $xh = x \vee t$ (C_2), $\hat{x}b = \overset{\wedge}{xb}$ (C_5) et $\overset{\wedge}{xy} = \hat{x}\hat{y}$ (C_4) : $\hat{t} = \hat{t}\hat{h} = \hat{t}h = t$.

Alors dans Q : $\widehat{x \vee t} = \hat{x} \vee t$.

Soit A le produit couplé de XIII. 2 proposition 1 : on considère sur A l'involution canonique : $\overline{(a, x)} = (\bar{a}, \hat{x})$. Le strict Ω-espace affine A étant le produit des stricts Ω-espaces affines P et Q, l'involution barre sur A respecte K_3.
A est encore le Ω-espace affine régulier produit des Ω-espaces affines P et Q.

Lemme 2 : A est une Ω-préalgèbre à involution.

Preuve : Il faut vérifier K_4 ; nous avons :

$$\overline{(a, x)}\ (b, y) = (\bar{a}b + \bar{a}y - \bar{a}h\ ,\ \overset{\wedge}{xy} - \hat{x}b + \hat{x} \vee t)$$

$$(a, x)\ \overline{(b, y)} = (a\bar{b} + a\hat{y} - ah\ ,\ x\hat{y} - x\bar{b} + x \vee t)$$

$$\overline{(a, x)\ (b, y)} = (\overline{ab} + \overline{ay} - \overline{ah}\ ,\ \widehat{xy} - \widehat{xb} + \widehat{x \vee t})\ .$$

Par C_4 et C_5 :

$$\overset{\wedge}{xy} - x\bar{b} + x \vee t = xy - xb - xt + xt + \hat{x} - x + x + t - xt$$
$$= \widehat{xy} - \widehat{xb} + \widehat{x \vee t}.$$

Le reste est facile.

Lemme 3 : Les Ω-préalgèbres P et Q étant plongées dans A :
i) L'involution sur P est la restriction de l'involution sur A.
ii) L'involution sur Q est la restriction de l'involution k-pointée sur A (III. 6).

Preuve : Soit $\bar{u} = (\bar{a}, \hat{x}) \in A$; on sait que $\bar{a} = k\bar{u}$ et $\hat{x} = k \vee \bar{u}$. Ainsi : $\bar{a} = \overline{ku}$ et $\hat{x} = \bar{x} - \bar{k} + k$, dans A.

Proposition 1 : Soient P et Q des Ω-préalgèbres couplées vérifiant C_1, C_2, C_3 avec chacune une involution sous C_4, C_5. Le Ω-espace affine A produit des Ω-espaces affines P et Q, muni de la loi binaire :

$$(a, x)\ (b, y) = (ab + ay - ah\ ,\ xy - xb + x \vee t)\ ,$$

est une Ω-préalgèbre à involution (notée -).
$k = (h, t)$ est idempotent et g-associatif.
P est isomorphe à la sous-préalgèbre à involution des ku et Q à la sous-préalgèbre des $k \vee u$ avec la restriction de l'involution

.../...

k-pointée.
L'image canonique de l'action de Q sur P (resp. P sur Q) est le produit (resp. la disjonction) à droite.

Réciproquement, soit A une Ω-préalgèbre à involution barre, contenant k idempotent et g-associatif, P la sous-préalgèbre à involution des ku et Q la sous-préalgèbre des $k \vee u$, munie de l'involution :
$\widehat{k \vee u} = k \vee \bar{u} = \overline{k \vee u} - \bar{k} + k$, restriction à Q de l'involution k-pointée sur A.
L'involution $\wedge$ sur Q respecte K_3 (VI. 1, Proposition 3). On a ensuite :
$\overset{\wedge}{xy} = (\bar{x} - \bar{k} + k)\, y = \overline{xy} - \bar{k} + k = \widehat{xy}$ car $ky = k$.
$x\hat{y} = x(\bar{y} - \bar{k} + k) = \overline{xy} - \overline{xk} + xk = \widehat{xy} - \widehat{xk} + xk$.
C_4 est donc vérifié.
Soit $a \in P$, $x \in Q$: $\bar{a}x = \overline{ax}$ par K_4.
$\overset{\wedge}{ax} = a(\bar{x} - \bar{k} + k) = \overline{ax} - \overline{ak} + ak$
$\hat{x} \vee a = (\bar{x} - \bar{k} + k) \vee a = \overline{x \vee a} - \bar{k} + k = \widehat{x \vee a}$ car $k \vee a \equiv k$.
$x \vee \bar{a} = \overline{x \vee a} - \bar{x} + x = \widehat{x \vee a} - \hat{x} + x$.
C_5 est donc vérifié pour les actions de XIII. 3, Lemme 3.
On voit que l'isomorphisme θ de XIII. 3, Lemme 4 est ici un isomorphisme de Ω-préalgèbres à involution.

Théorème 1 : Toute Ω-préalgèbre à involution, contenant un idempotent g-associatif, peut être obtenue par la construction de la proposition 1.

Remarquons le cas particulier suivant :

Proposition 2 : Soit la Ω-préalgèbre à involution de la proposition 1 pour laquelle l'involution barre est fixe sur k :
i) L'involution sur P est l'identité.
ii) Q est une Ω-préalgèbre à involution.

Preuve : i) $\overline{ku} = \bar{k}u = ku$
ii) $\widehat{k \vee u} = \overline{k \vee u}$.

Soit A la Ω-préalgèbre à involution de la proposition 1 : lorsque la loi binaire est $(a, x)(b, y) = (ab, xy)$, Q est nécessairement une Ω-préalgèbre à involution $\wedge$ puisque $(a, x)\,\overline{(b, y)} = \overline{(a, x)(b, y)}$ implique $\overset{\wedge}{xy} = \widehat{xy}$.

Soient P et Q des Ω-préalgèbres à involution, vérifiant C_1 ; on suppose de plus que l'involution $\wedge$ sur Q est fixe sur k. C_4 est donc respecté.

Lemme 5 : C_5 est vérifié pour l'action de Q sur P (resp. P sur Q) définie par : $ax = ah$ (resp. $xa = x \vee t$) quels que soient $a \in P$, $x \in Q$.

Preuve : $\bar{a}x = \bar{a}h = \overline{ah} = \overline{ax}$

$\hat{a}x = ah = \overline{ah} - \overline{ah} + ah = \overline{ax} - \overline{ah} + ah$

$\hat{x}a = \hat{x} \vee t = \widehat{x \vee t} = \widehat{xa}$

$\bar{x}a = x \vee t = \hat{x} \vee t = \hat{x} + x = \widehat{xa} - \hat{x} + x$.

Nous pouvons alors appliquer les propriétés de XIII. 4.

Théorème 2 : Toute Ω-préalgèbre à involution qui contient un idempotent central gauche est isomorphe au produit (classique) d'une Ω-préalgèbre à involution avec un neutre à gauche par une Ω-préalgèbre à involution avec un zéro à gauche.

Théorème 3 : Toute Ω-préalgèbre à involution qui contient un idempotent central fort est isomorphe au produit (classique) d'une Ω-préalgèbre à involution, unitaire, par une Ω-algèbre à involution.

XIII. 14

Soit F une Ω-algèbre et M un F-pseudo-Ω-module (resp. ——— généralisé). Si F est une Ω-algèbre à involution $\wedge$ et M un Ω-module à involution -, nous dirons que M est un F-pseudo-Ω-module (resp. ——— généralisé) à involution, lorsque :

$\hat{a}x = \bar{a}x = \overline{ax}$, quels que soient : $a \in M$, $x \in F$.

Si $\wedge$ est l'identité on retrouve la définition de XII. 2.

Si - est l'identité on a donc : $\hat{a}x = ax$; dans ce cas on dit simplement : F-pseudo-Ω-module (resp. ——— généralisé). Bien entendu il convient de préciser que F est la Ω-algèbre à involution $\wedge$.

Reprenons la construction de XIII. 13, Proposition 1 :

Proposition 1 : Si k est zéro à droite dans A, l'involution sur P est l'identité, Q est une Ω-algèbre à involution et P est un Q-pseudo-Ω-module généralisé.

Preuve : Par IX. 7, Proposition 1, k est fixe pour l'involution barre ; on peut donc appliquer XIII. 12, Proposition 2.
D'autre part : $\overset{\wedge}{ax} = a\bar{x} = \bar{a}x = ax$ pour $a \in P$ et $x \in Q$.

Proposition 2 : Soit Q une Ω-algèbre à involution $\wedge$ de zéro t et P un Q-pseudo-Ω-module généralisé de zéro h. Le Ω-espace affine produit A, avec la loi binaire : $(a, x)(b, y) = (b \oplus ay, xy)$ est une Ω-préalgèbre à involution.
$k = (h, t)$ est zéro à droite fort et g-associatif.
P est isomorphe au sous-strict-espace affine des zéros à droite, pointé en k.
Q est isomorphe à la sous-algèbre à involution des $k \vee u$.

Preuve : On complète la preuve de XIII. 5, Proposition 2, en vérifiant C_4 et C_5.

Théorème : Soit A une Ω-préalgèbre à involution contenant un zéro à droite fort et g-associatif :
Il existe une Ω-algèbre à involution Q et Q-pseudo-Ω-module généralisé P pour lesquels A est isomorphe au Ω-espace affine produit $P \times Q$, muni de la loi binaire :
$(a, x)(b, y) = (b \oplus ay, xy)$.

XIII. 15

Soit F une Ω-préalgèbre munie de l'involution barre : $a \to \bar{a}$.
On dit que F est une Ω-préalgèbre à du-involution barre si l'involution vérifie K_3 et :
K'_4 : $\bar{ab} = \overline{ab} - \bar{b} + b$; $a\bar{b} = \overline{ab} - \bar{a} + a$.
On vérifie que :

Lemme 1 : F est une Ω-préalgèbre à du-involution barre si et seulement si sa duale pour la disjonction est une Ω-préalgèbre à involution barre.

Soit F une Ω-algèbre et M un F-pseudo-Ω-module (resp. ——— généralisé). Si F est une Ω-algèbre à du-involution barre et M un Ω-module à involution $\wedge$ nous dirons que M est un F-pseudo-Ω-module (resp. ——— généralisé) à involution, lorsque :
$\overline{\hat{x}a} = \hat{\overline{xa}}$; $\overline{xa} = \hat{\overline{xa}} - \hat{x} + x$, quels que soient $x \in M$, $a \in F$.

Soit G une Ω-préalgèbre à involution barre, $k \in G$ et H un sous-strict-espace affine (resp. une sous-algèbre de zéro k) stable par l'involution k-pointée : $\hat{x} = \bar{x} - \bar{k} + k$:

Lemme 2 : H est un Ω-module (resp. une Ω-algèbre) à involution $\wedge$.

Preuve : Pour le module, voir II. 10, Lemme 2.
Pour l'algèbre il faut vérifier K_4 :
$\hat{ab} = \overline{ab} - \overline{kb} + kb = \overline{ab} - \bar{k} + k = \hat{\hat{ab}}$
$a\hat{b} = \overline{ab} - \overline{ak} + ak = \overline{ab} - \bar{k} + k = \hat{ab}$.

H est appelé : sous-module (resp. sous-algèbre) à involution k-pointée de G. Par exemple si k est neutre à droite dans G, l'ensemble des neutres à droite de G est un sous-module à involution k-pointée.

Reprenons la construction de XIII. 13, Proposition 1 et supposons que k soit neutre à droite dans A : P est une Ω-préalgèbre à involution, unitaire, donc sa duale P' est une Ω-algèbre à du-involution (lemme 1) ; par XIII. 6, Proposition 1 et C_5 (XIII. 13), Q est une P'-pseudo-Ω-module généralisé à involution.
Lorsque k est neutre à droite fort, on peut oublier le produit (zéro à gauche) dans Q et l'action (identique) de Q sur P. Plus généralement :

Proposition : Soit P' une Ω-algèbre à du-involution (de zéro h) et Q un P'-pseudo-Ω-module généralisé à involution (de zéro t).
Le Ω-espace affine produit A, avec la loi binaire :
$(a, x)\ (b, y) = (a \vee b,\ x \ominus xb)$
est une Ω-préalgèbre à involution (notée -).
$k = (h, t)$ est neutre à droite fort et g-associatif dans A.
P' est isomorphe à la duale de la sous-préalgèbre à involution, unitaire, des ku.
Q est isomorphe au sous-module à involution k-pointée des neutres à droite.

Preuve : Si on oublie les involutions, on obtient XIII. 6, Proposition 2 qui est le cas particulier de XIII. 2, Proposition 1 pour $xy = x$ et $ax = ah = a$.

Vérifions alors C_4 et C_5 (XIII. 13) :

C_4 : P est par hypothèse une Ω-préalgèbre à involution. Pour Q l'involution $\wedge$ vérifie évidemment K_3 ; d'autre part :

$$\overset{\wedge}{xy} = \hat{x} = \overset{\wedge}{xy} \quad ; \quad \overset{\wedge}{xy} = x$$
$$= \hat{x} - \hat{x} + x$$
$$= \overset{\wedge}{xy} - \overset{\wedge}{xt} + xt \ .$$

C_5 : $\bar{ax} = \bar{a} = \overline{ax} \quad ; \quad \overset{\wedge}{ax} = a$
$$= \bar{a} - \bar{\bar{a}} + a$$
$$= \overline{ax} - \overline{ah} + ah \quad , \text{ car } h \text{ est neutre à droite dans P.}$$

Les deux autres égalités de C_5 expriment que Q est une P'-pseudo-Ω-module généralisé à involution.

Théorème : Toute Ω-préalgèbre à involution contenant un neutre à droite fort et g-associatif, est isomorphe :
au Ω-espace affine produit d'une Ω-algèbre à du-involution P' par un P'-pseudo-Ω-module généralisé à involution,
avec la loi binaire : $(a, x)\ (b, y) = (a \vee b\ ,\ x \ominus xb)$.

XIII. 16

On étend la notion de quadruple de XIII. 7 en ajoutant les hypothèses suivantes :

B est une Ω-algèbre à involution : $\wedge$

C est une Ω-algèbre à du-involution : $-$

D est un Ω-module à involution : $\lrcorner$; c'est un B-pseudo-Ω-module à involution et un C^0-pseudo-Ω-module à involution

E est un Ω-module à involution : $\llcorner$; c'est un B^0-pseudo-Ω-module à involution et un C-pseudo-Ω-module à involution.

Par définition on a donc :

$$\overset{\wedge}{db} = \overset{\lrcorner}{db} = \overset{\lrcorner}{db} \quad ; \quad \overset{\lrcorner}{cd} = \overset{\lrcorner}{cd} \quad ; \quad \bar{cd} = \overset{\lrcorner}{cd} - \overset{\lrcorner}{d} + d$$

$$\overset{\wedge}{be} = \overset{\llcorner}{be} = \overset{\llcorner}{be} \quad ; \quad \overset{\llcorner}{ec} = \overset{\llcorner}{ec} \quad ; \quad \bar{ec} = \overset{\llcorner}{ec} - \overset{\llcorner}{e} + e$$

D'autre part on impose aux applications bilinéaires :

$$\overset{\llcorner}{ed} = \overset{\lrcorner}{ed} = \overset{\wedge}{ed} \quad ; \quad \overset{\lrcorner}{de} = \overset{\llcorner}{de} = \overline{de} - \bar{k} + k \ .$$

Lorsque ces conditions sont réalisées B, C, D, E est un quadruple à involution.

A partir d'un quadruple généralisé on définit de même un quadruple généralisé à involution.

Soit B, C, D, E un quadruple généralisé à involution et A sont produit quadruplé généralisé (obtenu en oubliant les involutions) : on munit A de l'involution canonique :
$\overline{(b, c, d, e)} = (\hat{b}, \bar{c}, \breve{d}, \check{e})$.

Lemme 1 : A est une Ω-préalgèbre à involution.

Preuve : Comme A est le Ω-espace affine produit des Ω-espaces affines B, C, D, E , K_3 est respecté. Il reste à vérifier K_4 :
Soit $u_i = (b_i, c_i, d_i, e_i)$ avec $i \in \{1, 2\}$: $\overline{u_1}\, u_2$ s'écrit :
$(\hat{b}_1\, b_2 \ominus \check{e}_1\, d_2,\ \bar{c}_1 \vee c_2 \oplus \breve{d}_1\, e_2,\ d_2 + \breve{d}_1\, b_2 - \bar{c}_1\, d_2,\ \check{e}_1 - \check{e}_1\, c_2 + \hat{b}_1\, e_2)$
soit :
$(\widehat{b_1\, b_2} \ominus \widehat{e_1\, d_2},\ \overline{c_1 \vee c_2} \oplus \overline{d_1\, e_2} \ominus \bar{k} \oplus k,\ d_2 + \breve{d}_1\, b_2 - \breve{c}_1\, d_2 + \breve{d}_2 - d_2,\ \check{e}_1 - \check{e}_1\, c_2 + \check{b}_1 e_2)$,
c'est-à-dire : $\overline{u_1\, u_2}$.
$u_1\, \bar{u}_2$ s'écrit :
$(b_1 \hat{b}_2 \ominus e_1\, \breve{d}_2,\ c_1 \vee \bar{c}_2 \oplus d_1\, \check{e}_2,\ \breve{d}_2 + d_1\, \hat{b}_2 - c_1\, \breve{d}_2,\ e_1 - e_1\, \overline{c_2} + b_1\, \check{e}_2)$
soit :
$(\widehat{b_1\, b_2} \ominus \widehat{e_1\, d_2},\ \overline{c_1 \vee c_2} \oplus \overline{d_1\, e_2} \ominus \bar{k} \oplus k,\ \breve{d}_2 + \breve{d}_1\, b_2 - \breve{c}_1\, d_2,\ e_1 - \check{e}_1\, c_2 + \check{e}_1 - e_1 + \check{b}_1 b_2)$,
c'est-à-dire : $\overline{u_1\, u_2}$.

A sera appelé : produit quadruplé généralisé à involution.

Lemme 2 : B, C, D, E étant, avec oubli des involutions, plongés dans A :
i) L'involution sur C est la restriction de l'involution sur A.
ii) L'involution sur B (resp. D, E) est la restriction de l'involution k-pointée sur A.

Preuve : Soit $\bar{u} = (\hat{b}, \bar{c}, \breve{d}, \check{e}) \in A$; on sait que $\hat{b} = k \vee \bar{u} \vee k$, $\bar{c} = k\bar{u}k$, $\breve{d} = k\bar{u} \vee k$, $\check{e} = k \vee \bar{u}k$. Ainsi $\hat{b} = \bar{b} - \bar{k} + k$, $\bar{c} = \overline{kuk}$, $\breve{d} = \bar{d} - \bar{k} + k$ et $\check{e} = \bar{e} - \bar{k} + k$.

Proposition : Soit B, C, D, E un quadruple généralisé à involution et A son produit quadruplé généralisé à involution.
k est idempotent et associatif dans A.
On peut identifier :

.../...

B à la sous-algèbre à involution k-pointée (XIII. 14, Lemme 2) des $k \vee u \vee k$.
C à la duale de la sous-préalgèbre à involution, unitaire, des kuk.
D (resp. E) au sous-module à involution k-pointée des $ku \vee k$ (resp. $k \vee uk$).

Réciproquement, soit A une Ω-préalgèbre à involution avec k idempotent et associatif et B, C, D, E le quadruple généralisé de XIII. 8, Lemme.
La duale C' de C étant une sous-préalgèbre à involution, unitaire, C est une Ω-algèbre à du-involution.
B (resp. D, E) étant stable pour l'involution k-pointée est (XIII. 15, Lemme 2) une Ω-algèbre (resp. un Ω-module) à involution ; cette involution est notée $\wedge$ (resp. $\lrcorner$, $\llcorner$).

Lemme 3 : B, C, D, E est quadruple généralisé à involution.

Preuve : On applique XIII. 8, Proposition :

$\overset{\wedge}{db} = \overline{db} - \overline{dk} + dk = \overline{db} - \bar{k} + k = \overset{\lrcorner}{db}$

$\overset{\lrcorner}{db} = \overline{db} - \overline{kb} + kb = \overline{db} - \bar{k} + k = \overset{\lrcorner}{db}$

De même pour l'action de B sur E.

$e \vee \bar{c} = \overline{e \vee c} - \bar{e} + e = e \vee c - \overset{\llcorner}{e} + e$

$\overset{\llcorner}{e} \vee c = \bar{e} \vee c - \bar{k} \vee c + k \vee c$

$= \overline{e \vee c} - \overline{k \vee c} + k \vee c$

$= \overline{e \vee c} - \bar{k} + k$

$= \overset{\llcorner}{e \vee c}$

De même pour l'action de C sur D

$\overset{\lrcorner}{de} = \overline{de} - \overline{ke} + ke = \overline{de} - \bar{k} + k$

$\overset{\llcorner}{ed} = \overline{ed} - \overline{kd} + kd = \overline{ed} - \bar{k} + k = \overset{\wedge}{ed}$

De même pour $\overset{\llcorner}{de}$ et $\overset{\lrcorner}{ed}$.

Théorème 1 : Toute Ω-préalgèbre à involution contenant un idempotent associatif est isomorphe à un produit quadruplé généralisé à involution.

Lemme 4 : Soit A le produit quadruplé généralisé à involution de la proposition
Si les actions de B et C sur D et E sont nulles (XIII. 10), alors l'involution : $\lrcorner$ est l'identité sur D et l'involution : $\llcorner$ est l'identité sur E.

Preuve : Propriété K_4 sur A.

Soit B une Ω-algèbre à involution $\wedge$, C une Ω-algèbre à du-involution $-$ et D et E des Ω-modules.
On considère la quadruple généralisé B, C, D, E pour les actions nulles de B et C dans D et E et les applications bilinéaires nulles de $E \times D$ dans B et $D \times E$ dans C.

Lemme 5 : B, C, D, E est un quadruple généralisé à involution.

Preuve : $\bar{c}d = k = cd - d + d$
$e\bar{c} = k = ec - e + e$
$de = k = \bar{k} - \bar{k} + k = \overline{de} - \bar{k} + k$
Le reste est immédiat.

Le produit quadruplé généralisé à involution de B, C, D, E est muni de la loi binaire :
$(b_1, c_1, d_1, e_1)(b_2, c_2, d_2, e_2) = (b_1 b_2, c_1 \vee c_2, d_2, e_1)$

Théorème 2 : Soit A une Ω-préalgèbre à involution avec k idempotent, associatif et vérifiant Q_3 ; A est isomorphe à un produit constitué par :
une Ω-algèbre à involution,
une Ω-préalgèbre à involution, unitaire,
une Ω-préalgèbre zéro à droite,
une Ω-préalgèbre zéro à gauche.

Théorème 3 : Toute Ω-préalgèbre à involution qui contient un idempotent associatif vérifiant Q_3, est uniquement isomorphe au produit d'une Ω-préalgèbre forte à involution par une Ω-préalgèbre zéro-neutre.

Preuve : On complète la preuve de XIII. 12, Théorème :
R étant muni de l'involution barre, A est muni de l'involution canonique :
$\overline{(r, s)} = (\bar{r}, s)$.
La sous-préalgèbre des (r, s_o) est munie de l'involution définie par :
$\overline{(r, s_o)} = k \vee \bar{u} \vee k + k \bar{u} k - k$
$= \overline{(r, s_o)}$
$= (\bar{r}, s_o)$.

Références pour le chapitre XIII

1. A. Batbedat : Préanneaux idempotents, Accademia Nazionale dei Lincei (Rendiconti Fisici), 1973.

2. A. Batbedat : Préanneaux booléens, préanneaux zéro-neutres, même référence.

XIV. 1

Soit B un binaire et $a \in B$: en IX. 1 nous avons associé à l'élément a l'application d_a de B dans B : $d_a : x \to xa$.
Soit n un entier positif. Par convention a^{n+1} représente ad_a^n ; ainsi $a^2 = aa$, $a^3 = (aa)a$, etc.

Définition : $a \in B$ est d'ordre n si $a^{n+1} = a$.

a est d'ordre fini s'il existe n pour lequel a est d'ordre n.
B est d'ordre n (resp. fini) si tout $a \in B$ est d'ordre n (resp. fini).

a est idempotent si $a^2 = a$: un idempotent est d'ordre n quel que soit n.
D'une façon générale un élément d'ordre fini possède un ordre minimal ; pour un idempotent l'ordre minimal est 1.

Soit $B = \{a, b\}$ le binaire défini par la table :

	a	b
a	b	b
b	a	a

B est d'ordre 2 et ne contient aucun idempotent.
Cependant :

Proposition : Si un binaire possède un élément associatif d'ordre fini, il contient un idempotent associatif.

Preuve : Si a est associatif et d'ordre $n > 1$, a^n est idempotent et associatif.

Dans ce cas : $a^n a = a a^n = a$. De plus, si a est central, l'idempotent a^n est central.

Dans [B n] nous avons étudié les anneaux associatifs d'ordre n :

i) Rappelons la propriété classique : tout anneau associatif d'ordre n est commutatif.

ii) L'ordre et la caractéristique sont étroitement liés.

iii) Les p-anneaux (associatifs d'ordre (p-1) et de caractéristique p, avec p premier) jouent un rôle particulièrement important.

Les propriétés des préanneaux d'ordre n sont beaucoup plus générales ; il suffit pour s'en convaincre de considérer l'exemple d'une Ω-préalgèbre zéro à

gauche ou à droite (XIII. 11) : c'est un préanneau associatif, idempotent, non commutatif, pour lequel la caractéristique (X. 1, Proposition) est indifférente et, bien entendu, ce n'est pas un préanneau booléen [J B].

Dans tout ce chapitre : m, n, r, i, j sont des entiers généralisment positifs, p est un nombre premier ; la dualité sur un préanneau est la dualité pour la disjonction ; Σ a son sens de sommation habituel.

XIV. 2

Soit E un préanneau : comme dans [J P], $a^{\bar{n}}$ représente a^n dans le dual de E. Ainsi $a^{\bar{2}} = a \vee a$, $a^{\bar{3}} = (a \vee a) \vee a$, etc.

Lemme 1 : Soit G un anneau unitaire :

$$a^{\bar{n}} = 1 \ominus (1 \ominus a)^n .$$

Preuve : L'involution ρ de Foster : $a \to (1 - a)$, étant un isomorphisme entre G et son dual : $(a^{\bar{n}})\rho = ((a)\rho)^n$.

Soit E un préanneau et $k \in E$: E se plonge dans l'anneau E' construit sur $E_k \times Z$ en XI. 7, Théorème bis, E' se plonge dans l'anneau unitaire E'' construit sur $E' \times Z$ en XII. 2. Ainsi E est plongé canoniquement dans l'anneau unitaire E'' et la disjonction sur E est la restriction de la disjonction sur E''.
Si $a \in E$, a^n est dans E et le lemme ci-dessus donne son expression. On voit que, sans hypothèse d'associativité, le développement de $(1 \ominus a)^n$ se fait comme dans le cas classique. D'où :

Proposition 1 : Soit E un préanneau et $a \in E$:

$$a^{\bar{n}} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} C_n^i \, a^i$$

Ainsi : $a^{\bar{2}} = 2a - a^2$; $a^{\bar{3}} = 3a - 3a^2 + a^3$; $a^{\bar{4}} = 4a - 6a^2 + 4a^3 - a^4$.

Définition : Un préanneau est à duordre n si son dual est d'ordre n.

La dualité conservant l'idempotence, tout préanneau d'ordre 1 est aussi à duordre 1, et réciproquement.

Lemme 2 : Soit E un préanneau de caractéristique 2 et d'ordre 2 :
S'il existe $a \in E$, non idempotent, alors quel que soit m :
$a^{\overline{m+1}} \neq a$.

Preuve : Compte tenu des hypothèses on a :
$a^{\bar{3}} = a^2 = a^{\bar{2}} \neq a$, donc $a^{\overline{m+1}} = a^2 \neq a$.

Dans la paragraphe suivant nous construisons des exemples de préanneaux de caractéristique 2, d'ordre 2, mais non idempotents : par ce lemme 2, quel que soit m, un tel préanneau ne peut pas être à duordre m.
En particulier nous donnons des exemples de préanneaux unitaires d'ordre n qui ne sont pas des préanneaux à duordre m c'est-à-dire des anneaux à duordre n qui ne sont pas d'ordre m.
Nous donnons aussi des exemples d'anneaux d'ordre 2 qui ne sont pas des anneaux à duordre m. Cependant, de tels anneaux sont nécessairement non associatifs et non unitaires comme le montre la :

Proposition 2 : Tout anneau unitaire ou associatif d'ordre n est aussi à duordre n.

Preuve : Le cas unitaire dépend du lemme 1.
Le cas associatif a été traité dans [J P] .

Soit E un préanneau associatif et $a \in E$: si a est d'ordre j, alors pour tout i positif : $a^{\bar{i}} a^j = a^i$ donc, proposition 1 : $a^{\bar{n}} a^j = a^n$ et par suite dans l'anneau E' : $a^{\bar{n}} = a^j \ominus (a^j \ominus a)^n$: c'est la formule établie par récurrence par P. Janin pour démontrer la proposition 2 dans le cas associatif.

Voici quelques exemples :

Soit $G = \{0, a, b, c\}$ avec la somme $\oplus$ définie par la table suivante :

$\oplus$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

G est le Vierergruppe de Klein, commutatif, de neutre 0 et de caractéristique 2.

Munissons G d'un produit de zéro : 0. Il est immédiat que $x(y \oplus z)$ et $xy \oplus xz$ (resp. $(y \oplus z)x$ et $yx \oplus zx$) sont égaux si l'un des x, y, z est zéro et si $y = z$ (caractéristique 2).
Soit maintenant y, z, t distincts et chacun égal à l'un des a, b, c. Soit x l'un des a, b, c et L_x (resp. C_x) l'ensemble des éléments xa, xb, xc (resp. ax, bx, cx).

Lemme : Le produit dans G est distributif par rapport à $\oplus$ si et seulement si pour tout $x \in \{a, b, c\}$, L_x et C_x sont de l'une des trois formes : $\{a, b, c\}$, $\{0, y, y\}$, $\{0, 0, 0\}$.

Preuve : $x(y \oplus z) = xt = xy \oplus xz$ pour L_x.

Dans chacun des exemples suivants nous donnons la table du produit en ommettant la ligne et la colonne de 0, nous notons Q l'anneau obtenu et P son dual (préanneau unitaire).

Exemple 1 :

	a	b	c
a	0	a	a
b	a	0	a
c	a	a	0

Q est associatif, commutatif et à duordre 2.
P est d'unité $e = 0$ et vérifie $x^2 = e$ pour tout $x \in P$.

Exemple 2 :

	a	b	c
a	b	0	b
b	0	0	0
c	b	0	b

Q est associatif, commutatif et à duordre 4. On remarquera que le produit dans P peut être identifié à la somme dans $Z/4$.

Exemple 3 :

	a	b	c
a	a	a	0
b	b	b	0
c	c	c	0

Q est associatif et non commutatif ; il vérifie $x^3 = x^2$ ou encore $x^3 = 3x^2 - 2x$ (caractéristique 2) c'est-à-dire $x^3 = x$ pour tout x ; il est donc à duordre 2.

Exemple 4 :

	a	b	c
a	0	b	b
b	a	0	a
c	a	b	c

Q n'est ni associatif ni commutatif ; vérifiant $x^3 = x^2$, il est à duordre 2.

Exemple 5 : Nous voulons construire des anneaux Q d'ordre 2 mais non à duordre 2.

Bien entendu a^2, b^2, c^2 doivent être différents de zéro ; de plus, (XIV. 2) il existe dans $\{a, b, c\}$ un élément non idempotent.

On part donc avec $a^2 = b$, ce qui, par $a^3 = a$, impose $ba = a$ et par XIV. 2, Lemme, $ca = c$ $(C_a = \{a, b, c\})$.

Ceci étant, si on choisit pour c^2 successivement les valeurs a, b, c on obtient :

	a	b	c
a	b	a	c
b	a	c	b
c	c	b	a

	a	b	c
a	b	c	a
b	a	b	c
c	c	a	b

	a	b	c
a	b	x	
b	a	x	
c	c	O	c

On remarque enfin que $b^3 = b$ impose $x = b$ dans la trosième table qui s'écrit alors :

	a	b	c
a	b	b	O
b	a	b	c
c	c	O	c

Exemple 6 :

	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

P et Q sont idempotents et non associatifs.

XIV. 4

Définition : Un préanneau booléen est un préanneau idempotent associatif et commutatif.

Un produit de préanneaux booléens est un préanneau booléen.

Proposition 1 :

i) Tout anneaux idempotent et associatif est booléen.

ii) Tout préanneau idempotent associatif et unitaire est booléen.

iii) Tout préanneau booléen est isomorphe au produit d'un anneau booléen par un préanneau booléen unitaire.

iv) Tout préanneau booléen est de caractéristique 2.

Preuve : ii) résulte de i) par dualité.
iii) [J P] proposition 26.
iv) C'est vrai pour un anneau booléen et, par dualité, pour un préanneau booléen unitaire donc, par iii), c'est vrai pour un préanneau booléen.

Soit E un préanneau booléen : c'est en particulier un strict groupe ternaire de caractéristique 2 pour la loi $a - b + c$. Le foncteur $\mathcal{H}$ de V. 4 lui associe un groupe 3-aire commutatif de caractéristique 2 construit sur E avec la loi $a \oplus b \oplus c$; en fait nous savons (V. 6) que pour tous a, b, c :
$a - b + c = a \oplus b \oplus c$.
Une étude très complète des préanneaux booléens a été faite par P. Janin dans [P B].

Un préanneau ne contient pas nécessairement d'idempotent central même s'il est associatif (exemple : préanneau zéro à gauche non trivial).
Un morphisme de préanneau respecte les idempotents mais pas nécessairement les idempotents centraux (par exemple l'application de source E, qui envoie tout élément de E sur un idempotent non central, est un morphisme).

Notation : Prébool est la catégorie des préanneaux booléens.
Paic est la catégorie des préanneaux associatifs qui possèdent un idempotent central, avec les morphismes qui respectent les idempotents centraux.

Soit E un objet de Paic, plongé dans l'anneau associatif E' (XIV. 2), B l'ensemble des idempotents centraux de E et B' l'anneau booléen des idempotents centraux de E', pour le produit initial et la somme

$$x \boxplus y = x \oplus y \ominus 2\,xy$$

Lemme 1 : B est un sous-préanneau (booléen) de B'.

Preuve : Soit x un élément de B ; $x \in B'$ puisque :
$(a + k\,\alpha)x = ax + kx\,\alpha$
$= xa + xk\,\alpha$
$= x(a + k\,\alpha)$
B est évidemment stable par le produit initial.
Enfin si x, y, z sont dans B :
$x \boxplus y \boxplus z = x \oplus y \oplus z \ominus 2\,xy \ominus 2\,xz \ominus 2\,yz \oplus 4\,xyz$
$= x + y + z - 2\,xy - 2\,xz - 2\,yz + 4\,xyz,$

.../...

est dans E et idempotent central.

On note $(E)\mathcal{B}$ le préanneau booléen des idempotents centraux du préanneau associatif E ; son produit est la restriction du produit initial ; sa loi ternaire est :
$x \boxplus y \boxplus z = x + y + z - 2xy - 2xz - 2yz + 4xyz$.

On retrouve, bien entendu, la proposition 23 de [J P].

Soit θ un morphisme de Paic de source E : on note $(\theta)\mathcal{B}$ la restriction de θ à $(E)\mathcal{B}$.

Lemme 2 : $(\theta)\mathcal{B}$ est un morphisme de Prébool.

Preuve : Par hypothèse θ respecte les idempotents centraux.
On voit qu'il respecte $x \boxplus y \boxplus z$.

Le foncteur $\mathcal{B}$ ainsi défini est le foncteur naturel de Paic dans Prébool.

On considère maintenant l'anneau associatif, commutatif, unitaire Ω, la Ω-préalgèbre associative E, k idempotent central dans E et E' la Ω-algèbre de XI. 7, théorème bis. Si $(a + k\alpha)$ est idempotent dans E' alors :
$a^2 + 2ka\alpha + k\alpha^2 = a + k\alpha$
soit : $a^2 + 2ka\alpha - 2k\alpha + k(\alpha^2 + 2\alpha) = a + k\alpha$,
ce qui impose : $\alpha(\alpha + 1) = \omega$.
Poursuivons sous l'hypothèse suivante : Ω n'a pas de vrais diviseurs de zéro.
On a donc nécessairement $\alpha = \omega$ ou $\alpha = -1$. Par conséquent les idempotents de E' non dans E sont de la forme $(a - k)$. Bien entendu $(a - k)$ est central dans E' si et seulement si a est central dans E.
Si $b' = (a - k) \in (E')\mathcal{B}$ alors $b = b' \boxplus k = a - 2ak + 2k \in (E)\mathcal{B}$.
Réciproquement, si $b \in (E)\mathcal{B}$ alors $b' = b \boxplus k = (b + 2k - 2kb - k) \in (E)\mathcal{B}$, parce qu'il est de la forme $(a - k)$. Il en résulte que les idempotents centraux de E' non dans E sont les éléments $b \boxplus k$ avec b parcourant $(E)\mathcal{B}$, d'où la :

Proposition 2 : Soit Ω un anneau associatif unitaire et intègre.
Si E est une Ω-préalgèbre associative contenant un idempotent central, plongée dans la Ω-algèbre E' libre pour E, alors $(E')\mathcal{B}$

.../...

est isomorphe à l'anneau booléen libre pour le préanneau booléen (E)$\mathfrak{S}$.

XIV. 5

Un préanneau zéro à gauche ou à droite (XIII. 11) est idempotent et associatif mais non commutatif s'il n'est pas trivial. S'il contient un zéro, un neutre, ou, plus généralement, un élément central alors il est trivial.
Ces propriétés s'appliquent à un préanneau zéro-neutre puisqu'il est isomorphe au produit d'un préanneau zéro à gauche par un préanneau zéro à droite (XIII. 12 proposition).

Théorème 1 : Tout préanneau associatif idempotent qui contient un élément central est un préanneau booléen.

Preuve : XIII. 4, Corollaire du théorème 2 ou encore proposition 25 de [J P].

Théorème 2 : Tout préanneau associatif idempotent est uniquement isomorphe au produit d'un préanneau booléen par un préanneau zéro-neutre.

Preuve : On applique XIII. 12, théorème 2 compte tenu du théorème 1 et XIII. 11 Lemme.

Proposition 1 : Tout préanneau associatif idempotent contenant un zéro à droite est uniquement isomorphe au produit d'un anneau booléen par un préanneau zéro à droite.

Preuve : On applique XIII. 5, théorème 2 en remarquant que pour tous $a \in P$, $x \in Q$: ax, qui s'écrit encore $ku(k \vee u)$ dans A, est égal à k.

Proposition 1 duale : Tout préanneau associatif idempotent contenant un neutre à droite est uniquement isomorphe au produit d'un préanneau booléen unitaire par un préanneau zéro à gauche (neutre à droite).

Par XIV. 3, Exemple 5, il existe des préanneaux idempotents non associatifs. On vérifie facilement que l'anneau Q de cet exemple est le seul anneau idempotent non associatif à 4 éléments.

Définition : Un préanneau booléen généralisé est un préanneau idempotent commutatif et de caractéristique 2.

Lemme : Tout anneau (resp. préanneau unitaire) idempotent est booléen généralisé.

Preuve : Pour un anneau la démonstration classique n'utilise pas l'associativité. Par dualité cette propriété s'applique à un préanneau unitaire idempotent.

En particulier il ne peut exister d'anneau idempotent à 3 éléments (et $Z/2$ est le seul à 2 éléments).

Théorème 3 : i) Tout préanneau booléen (resp. —— généralisé) se plonge dans un anneau booléen (resp. —— généralisé).
ii) Tout anneau booléen (resp. —— généralisé) se plonge dans un anneau booléen (resp. —— généralisé) unitaire.

Preuve : i) Soit E une $Z/2$-préalgèbre (caractéristique 2), idempotente, commutative et E' la $Z/2$-algèbre libre pour E de XI. 7 théorème bis ; E' est idempotente puisque :
$(a + k\alpha)^2 = a^2 + 2\,ak\,\alpha + k^2\,\alpha^2 = a + k\,\alpha$.
Si E est associative, E' est associative (XI. 7, Proposition).

ii) Soit E' une $Z/2$-algèbre idempotente, commutative et E'' la $Z/2$-algèbre unitaire construite sur $E' \times Z/2$ en XII. 2 ; E'' est idempotente puisque :
$(a + \alpha)^2 = a^2 + 2\,a\,\alpha + \alpha^2 = a + \alpha$.
Si E' est associative, E' est associative.

On sait (XIII. 4) que, pour un idempotent, les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) central fort,
ii) central et associatif.
Un préanneau qui contient un tel élément est fort (XIII. 12) comme dans le cas associatif nous avons les propriétés suivantes :

Théorème 4 : Tout préanneau idempotent fort est un préanneau booléen généralisé produit d'un anneau booléen généralisé par un préanneau booléen généralisé unitaire.

Théorème 5 : Tout préanneau idempotent qui contient un élément associatif est uniquement isomorphe au produit d'un préanneau booléen généralisé par un préanneau zéro-neutre.

Proposition 2 : Tout préanneau idempotent contenant un zéro à droite associatif est uniquement isomorphe au produit d'un anneau booléen généralisé par un préanneau zéro à droite.

Proposition 2 duale : Tout préanneau idempotent contenant un neutre à droite associatif est uniquement isomorphe au produit d'un anneau booléen généralisé par un préanneau zéro à gauche.

Ces résultats généralisent les propriétés que nous avons établies dans [1] et [2], références du chapitre XIII.

XIV. 6

Soit E un préanneau d'ordre n qui possède un zéro à droite associatif k. Dans la construction de XIII. 5, P est l'ensemble des zéros à droite de E (ensemble des ku) et Q le sous-anneau d'ordre n des $k \vee u$. P est un Q-pseudo-module pour l'action de Q sur P définie par le produit à droite dans E. Ainsi pour $a = ku$ et $x = k \vee u$, $ax = k + ku^2 - ku$.

Théorème 1 : Avec les notations précédentes, le préanneau E d'ordre n contenant un zéro à droite associatif est isomorphe au strict groupe ternaire produit : $P \times Q$, muni de la loi binaire distributive :
$(a, x)(b, y) = (b \oplus ay, xy)$.

Preuve : XIII. 5, théorème 1.

Soit Q un anneau, P un Q-pseudo-module généralisé, $a \in P$ et $x \in Q$: $(\ldots (ax)x) \ldots)x$ comportant i fois x est noté : $(ax)^i$. Si P est un Q-pseudo-module : $(ax)^i = ax^i$.

Proposition 1 : Soit Q un anneau et P un Q-pseudo-module généralisé. Le strict groupe ternaire produit A, avec la loi binaire :
$(a, x)(b, y) = (b \oplus ay, xy)$, est un préanneau d'ordre n si et

.../...

seulement si :

i) Q est d'ordre n,

ii) $\sum_{i=1}^{n} (ax)^i = k$, quels que soient $a \in P$, $x \in Q$.

Preuve : Par XIII. 5, Proposition 2, A est un préanneau.

La puissance $(n+1)^{\text{ième}}$ de (a, x) est $(\sum_{i=0}^{n} (ax)^i , x^{n+1})$.

Exemple : La condition ii) de la proposition est vérifiée lorsque l'action de Q sur P est nulle $(ax = k)$.

Dans un préanneau E d'ordre n avec k zéro à droite associatif, l'action de Q (sous-anneau des $k \vee u$) sur P (ensemble des ku) est nulle si et seulement si $k u^2 = ku$ pour tout $u \in E$.
E est alors isomorphe au produit d'un anneau d'ordre n par un préanneau zéro à droite.

Soit E un préanneau d'ordre n qui possède un neutre à droite associatif k. Dans la construction de XIII. 6, P est le sous-préanneau unitaire d'ordre n des ku , P' l'anneau dual de P et Q l'ensemble des neutres à droite (ensemble des $k \vee u$). Q est un P'-pseudo-module pour l'action de P' sur Q définie par la disjonction à droite dans E ; ainsi pour $a = ku$ et $x = k \vee u$, $xa = k + u - ku - u^2 + ku^2$.

Théorème 2 : Avec les notations précédentes, le préanneau E d'ordre n contenant un neutre à droite associatif est isomorphe au strict groupe ternaire produit : $P' \times Q$, muni de la loi binaire distributive :
$(a, x)(b, y) = (a \vee b, x \ominus xb)$.

Preuve : XIII. 6, théorème 1.

Proposition 2 : Soit P' un anneau et Q un P'-pseudo-module généralisé.
Le strict groupe ternaire produit A avec la loi binaire :
$(a, x)(b, y) = (a \vee b, x \ominus xb)$ est un préanneau d'ordre n si et seulement si :

i) P' est à duordre n (XIV. 2, Définition).

ii) $\sum_{i=1}^{n} C_n^i (-1)^i (xa)^i = k$, quels que soient $x \in Q$, $a \in P'$.

Exemple : La condition ii) de la proposition est vérifiée lorsque l'action de P' sur Q est nulle.

Dans un préanneau E d'ordre n avec k neutre à droite associatif, l'action de P' (dual du sous-préanneau unitaire des ku) sur Q (ensemble des k u) est nulle si et seulement si $ku^2 = ku + u^2 - u$ pour tout $u \in E$.
E est alors isomorphe au produit d'un préanneau unitaire d'ordre n par un préanneau zéro à gauche.

XIV. 7

Soit E un préanneau d'ordre n qui contient un élément associatif et central : par XIV. 1, Proposition, il existe dans E un idempotent associatif et central ce qui est équivalent à : central fort (XIII. 4). Il résulte alors de XIII. 4 théorème 2 :

Théorème : Tout préanneau d'ordre n qui contient un élément associatif et central est isomorphe au produit d'un préanneau unitaire d'ordre n par un anneau d'ordre n.

Par ce théorème, l'étude des préanneaux d'ordre n contenant un élément associatif et central est ramenée à celle des anneaux d'ordre n et des anneaux à duordre n (XIV. 2, Définition).

Les anneaux de XIV. 3, Exemples 1, 2, 3, 4, 5 sont respectivement :
1) Associatif, commutatif, à duordre 2 et non d'ordre n.
2) Associatif, commutatif, à duordre minimal 4 et non d'ordre n.
3) Associatif, non commutatif, à duordre 2.
4) A duordre 2, non associatif, non commutatif.
5) D'ordre 2 mais non à duordre n. Sur les trois anneaux de cet exemple un est commutatif.

Ainsi il existe des anneaux non associatifs d'ordre n ou (exclusif) à duordre m, commutatifs ou non.
Sous l'hypothèse d'associativité tout anneau d'ordre n est commutatif ; cette propriété ne s'étend pas aux anneaux à duordre n.
Sous l'hypothèse associatif ou unitaire tout anneau d'ordre n est aussi à

duordre n (XIV. 2, Proposition 2). La formule de XIV. 2, proposition 1 permet d'établir d'autres liens dans des cas particuliers comme le suivant :

Proposition 1 : Tout anneau de caractéristique p est d'ordre $(p^m - 1)$ si et seulement si il est à duordre $(p^m - 1)$.

Preuve : p étant premier (XIV. 1 fin), $C^i_{p^m}$ est divisible par p pour i de 1 à $p^m - 1$.

Soit A un anneau à duordre n : par définition, pour tout $a \in A$: $a^{\overline{n+1}} = a$; alors par XIV. 2, Proposition 1 :

Lemme 1 : A est à duordre n si et seulement si pour tout $a \in A$:

$$n\,a \oplus \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^{i+1}\, C^i_{n+1}\, a^i = 0$$

Pour $n = 2$: $a^{\overline{3}} = a$ si et seulement si $2\,a \ominus 3\,a^2 \oplus a^3 = 0$.

Proposition 2 : Pour tout anneau A d'ordre n ou à duordre n il existe un entier positif r pour lequel A est de caractéristique r.

Preuve : Si A (non nécessairement associatif) est d'ordre n :
$2\,a = (2\,a)^{n+1} = 2^{n+1}\, a^{n+1} = 2^{n+1}\, a$.
A étant maintenant à duordre n, soit $f(a) = 0$ la formule du lemme : dans $g(a) = 2^{n+1} f(a) - f(2\,a) = 0$ le coefficient de a^{n+1} est nul ; dans $h(a) = 2^n g(a) - g(2\,a) = 0$ celui de a^n est nul, etc. En fin de compte, on obtient :
$n(2^{n+1} - 2) \ldots (2^2 - 2)\, a = 0$.

Dans le cas des anneaux associatifs d'ordre n le lien entre l'ordre et la caractéristique est connu [B n] .
La détermination des anneaux à duordre m sous-directement irréductibles permettrait d'améliorer notre connaissance des anneaux à duordre n puisque leurs propriétés se transposent au cas général par l'intermédiaire du produit sous-direct...

Nous terminons ce paragraphe par d'autres exemples.

Soit Ω un anneau non trivial, associatif, commutatif, unitaire, d'ordre n et de caractéristique r.
Soit E l'ensemble des dilatations de Ω :
$a : x \in \Omega \to (\alpha\, x \oplus \alpha') \in \Omega$ (XI. 3, Proposition 2).
On sait (XI. 2, Proposition 1) que E est une Ω-préalgèbre associative unitaire.

Proposition 3 : Avec les notations précédentes, le dual F de E est un anneau associatif, non commutatif, à duordre rn et pour lequel l'ensemble des neutres à droite est équipotent à Ω.

Preuve : Si $a : x \to \alpha\, x \oplus \alpha'$ et $b : x \to \beta\, x \oplus \beta'$, alors :
$ab : x \to \alpha\beta\, x \oplus \alpha'\beta \oplus \beta'$.
Ainsi b est zéro à droite si et seulement si $\beta = 0$.
D'autre part, compte tenu de :
$\alpha^{rn+1} = \alpha$ et $r(\alpha^n \oplus \alpha^{n-1} \oplus \ldots \oplus \alpha) = 0$,
on voit que $a^{rn+1} = a$.

En particulier si Ω est un anneau booléen : $n = 1$, $r = 2$; F est un anneau à duordre 2. Lorsque $\Omega = Z/2$, F est isomorphe à l'anneau de XIV. 3, Exemple 3.

Soit k la dilatation de Ω : $x \to 0$. k étant zéro à droite dans le préanneau associatif E, on peut lui appliquer XIV. 6, théorème 1 : avec ces notations P (resp. Q) est l'ensemble des dilatations : $x \to \alpha'$ (resp. $x \to \alpha\, x$), l'anneau Q est isomorphe à Ω, P est identifié au Ω-module Ω et le produit dans E est $(\alpha', \alpha)(\beta', \beta) = (\beta' \oplus \alpha'\beta, \alpha\beta)$.
Ainsi, considérer les dilatations de Ω, c'est faire la construction de XIV. 6, proposition 1, à partir du couple (Ω, Ω).

Reprenons cette construction dans le cas général.

Lemme 2 : Le préanneau d'ordre n de XIV. 6, Proposition 1, est unitaire si et seulement si Q est unitaire et agit sur P sous P_4 (XII. 1).

Soit 1 le neutre de Q et k le zéro de P : $(k, 1)$ est le neutre dans A.
Ceci étant le dual de A est un anneau à duordre n non commutatif si P n'est pas trivial ; il est associatif si et seulement si Q est associatif et P est un Q-module (XIII. 5, Proposition 3).

Si Q est de caractéristique r, P est aussi de caractéristique r. Lorsque P est un Q-module la condition ii) de XIV. 6, Proposition 1 s'écrit : $\sum_{i=1}^{m} ax^i = k$; elle est satisfaite pour $m = n\,r$. Alors :

Proposition 4 : Soit Q un anneau unitaire, d'ordre n, de caractéristique r et P un Q-module non trivial.
Le strict groupe ternaire produit $P \times Q$, avec la loi binaire :
$(a, x)\,(b, y) = (a \ominus ay, x \vee y)$
est un anneau A non commutatif à duordre r n, de caractéristique r.
A est associatif si et seulement si Q est associatif.

XIV. 8

Définition : Le préanneau E est n-involutif s'il possède un neutre e et si pour tout $a \in E$: $a^n = e$.

Un préanneau 1-involutif est trivial ($E = \{e\}$) ; un préanneau n-involutif qui contient un zéro à gauche ou à droite est trivial.
Un préanneau 2-involutif est involutif au sens classique.

Exemple 1 : Le préanneau P de XIV. 3, Exemple 1 (resp. 2) est involutif (resp. 4-involutif).

Soit E un préanneau n-involutif : pour tout $a \in E$, $a^{n+1} = a^n\,a = ea = a$, donc E est d'ordre n. D'autre part il est immédiat que x idempotent implique $x = e$.

Proposition 1 : Soit E un préanneau associatif. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) E est n-involutif.
ii) Le dual de E est un anneau à duordre n qui n'a pas d'autre idempotent que zéro.
iii) E est d'ordre n et possède un unique idempotent.
iv) E est un précorps d'ordre n sans zéro.

Preuve : i) implique ii) et iii) : commentaires précédents qui s'appliquent sans hypothèse d'associativité.

iii) (et donc ii)) implique i) : soit k l'unique idempotent (par XIV. 1, Proposition, il en existe nécessairement un) ; pour tout a : $a^n = k$ donc $ak = ka = a$.

i) implique iv) : $aa' = a'a = e$ avec $a' = a^{n-1}$.

iv) implique i) : soit $a \in E$: il existe a' tel que $a'a = e$, alors $a^n = e\ a^n = a'\ a^{n+1} = a'\ a = e$.

Corollaire : Soit $(G, \oplus)$ un groupe binaire commutatif de neutre e et d'ordre n.
Le strict groupe ternaire G muni de la disjonction nulle (X. 9) pointée sur e est un préanneau associatif n-involutif.

Le préanneau n-involutif ainsi construit à partir du groupe $(G, \oplus)$ a pour loi ternaire : $a \ominus b \oplus c$ et pour produit $a \oplus b$. Il est de caractéristique n et d'ordre n.
Son dual est l'anneau nul associé à $(G, \oplus)$.

Pour un ensemble à 2 (resp. 3) éléments, il n'y a pas d'autre préanneau n-involutif que celui du corollaire pour le groupe à 2 (resp. 3) éléments. Pour $(Z/2, \oplus)$ c'est immédiat. Pour $(Z/3, \oplus)$ on construit un anneau en posant $1^2 = x$, ce qui donne $1.\ 2 = 2.\ 1 = 2x$ et $2^2 = x$; si on impose 1 et 2 non idempotents, alors $x = 0$.

Lemme : Le préanneau E est n-involutif si et seulement si son dual est un anneau qui vérifie pour tout a :

$$a^n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+i+1} C_n^i\ a^i$$

Un préanneau de caractéristique p est p^m-involutif si et seulement si son dual vérifie $a^{p^m} = 0$.
Un préanneau est involutif si et seulement si son dual vérifie $a^2 = 2a$.

Proposition 2 : Soit A un anneau dans lequel $a^2 = 2a$ pour tout $a \in A$.
A est de caractéristique 4.
Pour tous a, b : $a^3 = 0$ et $ab = \ominus ba$.
Si A est de caractéristique 2 ou associatif alors il est commutatif.

Preuve : $(a \oplus b)^2 = 2(a \oplus b)$ implique : $ab \oplus ba = 0$.
En particulier $2\,a^2 = 4\,a = 0$.
Si A et son dual E sont associatifs, on a dans E de neutre e :
$(ab)\,(ab) = e$ et $(ab)\,(ba) = ab^2\,a = a^2 = e$ donc $ab = ba$.

Exemple 2 : L'anneau Q de XIV. 3, Exemple 1, est de caractéristique 2 et vérifie $a^2 = 0$ $(= 2\,a)$.

Exemple 3 : Soit H l'anneau $Z/8$; pour tout $h \in H$: $4\,h(h+1) = 0$ donc $4\,h^2 = 4\,h$. Par conséquent l'anneau $A = 2\,H$ vérifie $a^2 = 2\,a$; il est de caractéristique 4.
Par l'isomorphisme de Foster (XIV. 2, Preuve du Lemme 1) le préanneau involutif dual de A est isomorphe au préanneau des nombres impairs modulo 8.

Soit B un préanneau booléen ; on sait que B est canoniquement muni de la relation d'ordre $\leqslant$: $x \leqslant y$ si et seulement si : $xy = x$.

Théorème : Soit E un préanneau associatif d'ordre n pour lequel tous les idempotents sont centraux.
Si (E)ℬ (XIV. 4) possède un élément minimal, E est isomorphe au produit d'un anneau associatif d'ordre n par un préanneau associatif n-involutif.

Preuve : Soit k un élément minimal de (E)ℬ , P le préanneau associatif unitaire des ku et Q l'anneau associatif des $k \vee u$: E est isomorphe au produit : $P \times Q$ (XIV. 7, théorème). Si $x = ka$ est un idempotent de P alors $kx = x$ donc $x \leqslant k$ ce qui impose $x = k$ puisque k est minimal ; par la proposition 1, P est n-involutif.

Exemple 4 : L'ensemble E des nombres impairs modulo 12 est canoniquement un préanneau associatif et commutatif d'ordre 2.
Les idempotents de E sont 9 et 1 ; 9 est le plus petit. $Q = \{9, 1, 5\}$ est isomorphe à $Z/3$, $P = \{9, 3\}$ est le préanneau involutif à 2 éléments et E est isomorphe au produit : $P \times Q$.

XIV. 9

Nous allons étendré certains résultats de [B p^m].

A chaque anneau booléen unitaire B'' on associe son espace dual $X'' = \mathrm{Spec}\ B''$ espace topologique compact et totalement discontinu des idéaux maximaux de B''. L'application ξ qui, à $b \in B''$ associe l'ensemble des idéaux maximaux ne contenant pas b, est une bijection entre B'' et l'ensemble des ofs de X''. Ainsi B'' est isomorphe à l'anneau booléen des application continues de X'' dans $Z/2$ muni de la topologie discrète.

Soit B' un anneau booléen non unitaire et B'' l'anneau booléen unitaire associé : B' est un idéal maximal de B'', encore noté t. Il existe une bijection canonique entre les idéaux maximaux de B' et $\{X'' - t\}$, ce qui permet d'identifier l'espace dual $X' = \mathrm{Spec}\ B'$ avec $\{X'' - t\}$ muni de la topologie induite ; on peut dire aussi que X'' est le compacifié de l'espace topologique localement compact X'.
B' peut être considéré comme l'anneau booléen des applications continues de X'' dans $Z/2$ qui envoient t sur 0 ou comme l'anneau booléen des applications continues à support compact de X' dans $Z/2$.

Soit B un préanneau booléen ne contenant ni zéro ni neutre et B' (resp. B'') l'anneau booléen (resp. —— unitaire) associé : les éléments de B' non dans B constituent un idéal maximal de B' et déterminent l'idéal maximal z de B''. Un idéal maximal de B est l'image réciproque du zéro par un morphisme de préanneaux de B dans $Z/2$ (VI. 5, Proposition). B' étant le préanneau booléen libre pour B on voit que l'ensemble des idéaux maximaux de B correspond bijectivement à $\{X'' - t - z\}$. On peut ainsi considérer le dual de B comme $\{X'' - t - z\}$ muni de la topologie induite et B comme un préanneau de fonctions continues, de cet espace dans $Z/2$, soumises à certaines conditions.
L'étude de l'espace dual d'un préanneau booléen étant développée dans [J B], nous nous placerons ici dans le contexte suivant : B est isomorphe au préanneau booléen des applications continues de X'' dans $Z/2$ qui envoient t sur 0 et z sur 1.
Comme dans [B p^m], F est l'anneau $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}\}$, associatif, commutatif, unitaire et n'ayant pas d'autre idempotent que le zéro $\varepsilon_0 = 0$ et le neutre $\varepsilon_{n-1} = 1$. On munit F de la topologie discrète.

Lemme 1 : Avec les notations précédentes :

L'ensemble A des applications continues de X'' dans F est une F-algèbre unitaire (c'est un F-anneau au sens de [B p^m]).

L'ensemble de celles qui envoient t sur ε_o (resp. z sur ε_{n-1} ; t sur ε_o et z sur ε_{n-1}) est une F-algèbre (resp. F-préalgèbre) associative et commutative.

Définition 1 : Un préanneau est un pré-F-anneau s'il peut être obtenu de l'une des façons précédentes.

Munissons F de l'ordre total par indices croissants : tout pré-F-anneau est alors canoniquement ordonné et l'on voit que :

Proposition 1 : Tout pré-F-anneau est un treillis.

Soit E un pré-F-anneau obtenu à partir de X'' et éventuellement t ou z : E est plongé dans le F-anneau unitaire A du Lemme 1. On sait que pour tout $a \in A$ il existe une famille unique (b_i) de (n-1) idempotents orthogonaux telle que : $a = \sum_1^{n-1} b_i \varepsilon_i$; ceci n'est pas toujours vrai pour E mais on peut affirmer (voir la proposition 4 de [B p^m]) que pour tout $a \in E$ il existe une unique famille (c_i) de (n-1) idempotents totalement ordonnée par indices décroissants et pour laquelle :

$$a = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \varepsilon_i - \sum_{j=1}^{n-2} c_{j+1} \varepsilon_j \ .$$

Pour un même a ces deux familles sont reliées par les relations $c_j = \sum_{i \geqslant j} b_i$. Les formules du lemme 2 de [B p^m] permettent alors d'exprimer dans E la somme et le produit en fonction des idempotents des familles totalement ordonnées associées... La réciproque fournit une nouvelle caractérisation (intrinsèque) des pré-F-anneaux à partir du préanneau booléen sous-jacent des idempotents ; elle ouvre aussi la voie à une démonstration de l'équivalence de la catégorie des pré-F-anneaux à Prébool (XIV. 4).

Définition 2 : Soit F_{p^m} le corps à p^m éléments : un pré-F_{p^m}-anneau (définition 1) est appelé pré-p^m-anneau (pour $m = 1$ on dit simplement pré-p anneau).

Lemme 2 : Tout pré-p^m-anneau est un préanneau associatif, commutatif, de caractéristique p et d'ordre $(p^m - 1)$.

La réciproque n'est pas exacte, cependant le cas des préanneaux est ramené au cas des anneaux par la :

Proposition 2 : Tout préanneau E associatif, commutatif, de caractéristique p et d'ordre $(p^m - 1)$ se plonge dans un anneau associatif, commutatif, de caractéristique p et d'ordre $(p^m - 1)$.

Preuve : E se plonge dans l'anneau E' de XI. 7, Théorème bis, construit avec $\Omega = F_p$ (caractéristique p). E' est d'ordre $(p^m - 1)$.

Proposition 3 : Tout préanneau associatif, commutatif, de caractéristique p et d'ordre $(p-1)$ est un pré-p-anneau.

Preuve : L'anneau ,de la proposition 2 est un p-anneau.

Proposition 4 : Toute F_{p^m}-préalgèbre associative, commutative et d'ordre (p^m-1) est un pré-p^m-anneau.

Preuve : On fait le plongement de la proposition 2 avec F_{p^m} au lieu de F_p. l'anneau E' est alors un p^m-anneau.

L'application pratique aux pré-p-anneaux des résultats du début de ce paragraphe se fait simplement en posant $\varepsilon_i = -i$.
Pour les p^m-anneaux, avec $m > 1$, on peut choisir un générateur ε du groupe multiplicatif de F_{p^m} et poser : $\varepsilon_i = \varepsilon^i$ pour tout i de 1 à (p^m-1).

XIV. 10

On rappelle la définition 41 de [J P] : un m-préanneau est un préanneau dans lequel, pour tout a : $a^m = a^{\overline{m}} = a$ ou ce qui est équivalent : préanneau d'ordre $(m-1)$ et à duordre $(m-1)$.
Tout préanneau idempotent, commutatif ou non est un 2-préanneau.

Proposition 1 : Tout préanneau de caractéristique p et d'ordre (p^m-1) est un p^m-préanneau.

Preuve : C'est l'analogue pour les préanneaux de XIV. 7, Proposition 1.

Corollaire : Tout pré-p^m-anneau (XIV. 9) est un p^m-préanneau associatif, commutatif et de caractéristique p.

Proposition 2 : Tout m-préanneau associatif qui contient un élément central est commutatif.

Preuve : Par XIV. 7, théorème, on est ramené au cas bien connu des anneaux associatifs d'ordre n.

Appliquons les résultats de [B n] aux (n+1)-préanneaux associatifs et commutatifs.
Soit E un tel préanneau, k un idempotent de E, P le sous-préanneau unitaire des ku et Q le sous-anneau des $k \vee u$: on sait que E est isomorphe au produit $P \times Q$; de plus, Q et le dual P' de P sont des anneaux associatifs d'ordre n.
On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs i de n qui sont de la forme (p^m-1), avec $m > 0$; à chaque $i \in \mathcal{D}$ est ainsi canoniquement associé un nombre premier p.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble de ces nombres premiers pour i parcourant $\mathcal{D}$.

Proposition 3 : Soit E un (n+1)-préanneau associatif et commutatif :

i) n' étant le plus petit commun multiple des éléments de $\mathcal{D}$, E est un (n'+1)-préanneau (on a, bien entendu, $n' \leqslant n$).

ii) r étant le produit des éléments de $\mathcal{C}$, E est de caractéristique r.

Preuve : C'est vrai pour P' et pour Q ([B n] proposition 2), donc E est de caractéristique r.
Pour l'ordre, il faut auparavant remarquer que l'anneau associatif P' étant d'ordre n', son dual P est aussi d'ordre n' (XIV. 2, Proposition 2).

Exemple 1 : Si $n = 14$: $\mathcal{D} = \{7, 2, 1\}$; $\mathcal{C} = \{3, 2\}$.
$n' = 14$; $r = 6$.

Exemple 2 : Si $n = 50$: $\mathcal{D} = \{10, 2, 1\}$; $\mathcal{C} = \{11, 3, 2\}$.
$n' = 10$; $r = 66$.

Soit E un (n+1)-préanneau associatif, commutatif et $p \in \mathcal{P}$: on note i(p) le plus petit commun multiple des éléments i de $\mathcal{D}$ associés à p et $\lambda(p)$ le produit des éléments de $\{\mathcal{P} - p\}$, pris à la puissance i(p).
Si j est un entier positif l'ensemble des ja-(j-1)k pour a parcourant E est un sous-préanneau de E (c'est le cas pour Q, P' et P) : on le note j E.

Théorème 1 : Tout (n+1)-préanneau associatif et commutatif est isomorphe au produit, pour p parcourant $\mathcal{P}$, des (i(p)+1)-préanneaux de caractéristique p : $\lambda(p)$ E.

Preuve : C'est vrai pour P' et pour Q ([B n] Théorème 1).
Le dual P du produit des $\lambda(p)$ P' est le produit des duaux des $\lambda(p)$ P' donc c'est encore vrai pour P.
Il suffit alors dans le produit $P \times Q$ de regrouper pour chaque p , $\lambda(p)$ P et $\lambda(p)$ Q.

Exemple 3 : On reprend l'exemple 1 : i(2) = 7 ; i(3) = 2.
Tout 15-préanneau est isomorphe au produit d'un 8-préanneau (nécessairement de caractéristique 2) par un 3-préanneau de caractéristique 3.

Pour certaines valeurs de n que nous allons préciser, on peut certainement se ramener aux pré-p-anneaux, ce qui offre l'avantage de permettre une représentation par des applications continues (XIV. 9).
N étant l'ensemble des entiers naturels, on appelle crible de décomposition en pré-p-anneaux la partie N_d de N obtenue en enlevant le zéro et les multiples des nombres (p^m-1), p premier, $m > 1$.

Théorème 2 : Quel que soit $n \in N_d$, tout (n+1)-préanneau associatif, commutatif E est isomorphe à un produit de pré-p-anneaux.
Si n est impair, E est un préanneau booléen.

Preuve : C'est le cas particulier du théorème 1 où pour tout $p \in \mathcal{P}$; i(p) = (p-1).
Si n est impair alors p = 2.

Exemple 4 : Pour les valeurs suivantes de n , E est un préanneau booléen :
1, 5, 11, 13, 19, 23, 25 ...

Exemple 5 : Décompositions en pré-p-anneaux pour les valeurs de $n \in N_d$ inférieures à 25 :

n	2	4	10	20	22
valeur de p associés	3,2	5,3,2	11,3,2	11,5,3,2	23,3,2

Références pour le chapitre XIV

B_n : A. Batbedat : Anneaux d'ordre n. Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées. Tome XVI, n° 9 (1971).

B_{p^m} : A. Batbedat : p^m-Anneaux, Même revue. Tome XVII, n° 7 (1972).

Nous présentons ici quelques perspectives de recherche ; on peut distinguer trois catégories.

D'une part, en cours d'exposé, nous avons évoqué plus ou moins explicitement des études qui mériteraient d'être approfondies ; citons :

II. 8 Binaire opérant sur un ternaire ; cas particulier des objets (F, S) du théorème.

VIII. 2 Prégéométrie ; préincidence ; incidence.

VIII. 8 Plongement d'une incidence faiblement arguésienne dans une incidence translative.

VIII. 10 Incidence symétrique.

VIII. 14 Incidence équilibrée et lien avec les espaces de E. Sperner.

VIII. 22 Sous-espaces géométriques ; cas particulier des plans.

X. 2 Une nouvelle caractérisation des préalgèbres, ou bien une généralisation de cette notion.

X. 5 Les sous-espaces et les noyaux d'une préalgèbre (nous sommes volontairement resté discret dans ce domaine car Pierre Janin a fait une étude très complète pour un préanneau ; cependant nous présentons plus loin un outil qui permettrait de reprendre ces questions).

XI. 8 Applications biaffines.

XII. 6 Etude directe de certaines structures prémodulaires (le couple (E, P) où E est un strict groupe ternaire et P son préanneau des endomorphismes est un modèle très naturel ; or dans ce cas P agit sur E sous des axiomes semblables à ceux d'un module, à cela près que les sommes binaires sont remplacées par les lois ternaires).

XIV. 7 Anneaux à duordre n.

XIV. 9 Théorie spectrale pour un préanneau.

D'autre part, on peut envisager de généraliser des théories développées dans ce travail ; nous allons maintenant préciser quelques possibilités dans ce sens : En mathématiques, l'étude des structures n-aires a été faite tout d'abord avec l'idée d'étendre des propriétés binaires classiques (voir par exemple les références 1, 7, 9, 10, 11, 12 du Chapitre I). Maintenant on sait que l'utilisation d'une loi n-aire et en particulier d'une loi ternaire peut, dans des cas spécifiques, présenter des avantages incontestables : il existe de très nombreux exemples ; contentons-nous de citer notre démarche affine prolongeant celle de Pierre Janin et de rappeler (références de I) l'application d'une loi ternaire

à la géométrie (resp. aux probabilités) par J. Certaine et D. Vakarelov (resp. M. Brissaud).
De ce fait l'étude des ternaires ou des ternaires à opérateur présente un intérêt accru et nous pensons que pour cela les chapitres I et II seraient d'un grand recours. Ce point de vue est illustré par notre note (citée en référence 2 au Chapitre I) sur les faibles demi-groupes ternaires contenant un élément inversible aux extrêmes : la seule idée de groupe appliquée dans ce cadre fait apparaître au moins cinq cas différents. Comme dans cette note nous nous en sommes tenu à des généralités, la classe des faibles demi-groupes ternaires offre des perspectives de recherche intéressante, d'autant que cette structure est à la base de la notion de préespace affine que nous allons introduire à présent.

On peut généraliser la situation de III. 1, Définition, par affaiblissement des axiomes, de la façon suivante :

Définition 1 : Soit Γ un binaire (resp. anneau) de neutre 1 et T un ensemble.
T est un Γ-préespace affine s'il existe une application de $T^2 \times \Gamma \times T$ dans T, notée (a, b, α, c) et vérifiant l'axiome A_3 (resp. les axiomes A_2 et A_3).

Que Γ soit un binaire ou un anneau, il résulte de A_3 que tout Γ-préespace affine est un faible demi-groupe ternaire pour $(a, b, 1, c)$. Dans ce contexte on généralise la notion de préalgèbre en munissant un Γ-préespace affine d'une loi binaire distributive...

Voici une autre généralisation de la notion d'opération affine.

Définition 2 : Soit Ω un anneau unitaire, E et S des ensembles tels que S contienne l'application identique $\mathcal{I}$ de E dans E.
E est un Ω-bloc à opérateur S s'il existe une application de $E^2 \times S \times \Omega \times E$ dans E, notée (a, b, s, α, c) et vérifiant :
BO1 : E est un strict Ω-espace affine pour l'application de $E^2 \times \Omega \times E$ dans E $(a, b, \mathcal{I}, \alpha, c)$.
BO2 : $((a, b, \mathcal{I}, \alpha, c), d, s, \beta, e) = (a, b, s, \alpha\beta, (c, d, s, \beta, e))$ et $((a, b, s, \alpha, c), d, \mathcal{I}, \beta, e) = (a, b, s, \alpha\beta, (c, d, \mathcal{I}, \beta, e))$.

Nous avons pu établir pour les Ω-blocs à opérateur S des propriétés semblables

à celles de III. 1, 2 et 3, ce qui situe clairement cette construction dans le prolongement de celle de III. 1, mais l'intérêt de cette notion dépasse largement de cadre comme nous allons le montrer.
Un morphisme de Ω-blocs à opérateur S est une application θ qui vérifie $((a, b, s, \alpha, c))\,\theta = ((a)\,\theta, (b)\,\theta, s, \alpha, (c)\,\theta)$; ceci étant on démontre, comme dans VI. 3, Théorème, que les noyaux d'un Ω-bloc à opérateur S sont ses sous-espaces.
Ainsi en adaptant cette construction à une généralisation analogue des préalgèbres (il ne s'agit plus ici d'ajouter une loi binaire distributive mais de créer une opération pour cette structure) on apportera un outil pour l'étude des sous-espaces et des noyaux dans les préalgèbres.

De même que pour l'opération ,affine, on peut envisager d'autres aspects de la notion de loi pondérée : la note [7], références de l'introduction, ouvre des perspectives dans ce sens et l'opération sur les espaces n-barycentrés de J.L. Gaillard (VII. 9) constitue un exemple dans ce domaine.

Nous abordons maintenant une nouvelle structure qui a fait l'objet de quelques recherches récentes. Un certain nombre d'auteurs ont eu à utiliser des modules avec une loi ternaire vérifiant des axiomes semblables à ceux d'une algèbre classique (c'est-à-dire binaire, le cas actuel étant naturellement qualifié de ternaire) : c'est ainsi que dans [4] M.R. Hestenes travaille sur des matrices avec un produit ternaire du type $AB^{*}C$ (écriture pour la composition classique) et que P. Zvengrowski, étudiant certains produits vectoriels, propose dans [6] un produit ternaire sur l'algèbre de Caley (donc sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^8$).
Dans [3] I. Creangà expose des généralités sur les algèbres ternaires et dans [5] W.G. Lister résoud le problème du plongement d'un anneau ternaire dans un anneau binaire.
Notre travail permet de se placer dans un contexte plus général ; avec les notations de I. 2, nous posons :

Définition 3 : Soit Ω un anneau unitaire. P est une Ω-préalgèbre ternaire si c'est un strict Ω-espace affine muni d'un produit ternaire abc vérifiant pour $i \in \{g, m, d\}$:
$(a, b, \alpha, c)\, i_{de} = (a\, i_{de}, b\, i_{de}, \alpha, c\, i_{de})$.

Un préanneau ternaire est une $\mathbb{Z}$-préalgèbre ternaire (dans ce cas on peut remplacer l'opération affine par $a - b + c$).
Une Ω-algèbre ternaire est une Ω-préalgèbre ternaire avec un zéro (I. 2, Définition) ; un anneau ternaire est une $\mathbb{Z}$-algèbre ternaire. La caractéristique d'une préalgèbre ternaire est celle de l'espace affine sous-jacent ; les autres propriétés concernent généralement le produit ternaire : ainsi on pourra appliquer les résultats du I sur diverses notions d'associativité, de commutativité ou d'inversibilité... En particulier nous appelons précorps ternaire, un préanneau ternaire dont tout élément à l'exception du zéro éventuel est inversible.
Nous avons établi dans [1] que toute Ω-préalgèbre ternaire peut être plongée dans une Ω-algèbre ternaire avec respect de certaines propriétés éventuelles d'associativité ou de commutativité ; on peut ensuite, compte tenu de [5], prolonger ce plongement pour arriver dans une Ω-algèbre binaire.
Avec la possibilité, selon les circonstances, d'utiliser le plongement précédent ou de faire une recherche directe, on peut envisager d'étudier les préalgèbres ternaires.

Pour terminer, nous voudrions mettre l'accent sur la richesse du concept de démarche affine : ce travail a montré que dans des contextes affines issus du modèle classique, il est possible d'effectuer des démarches affines très différentes ; d'autre part notre note (citée en référence 2 du Chapitre I) sur les faibles demi-groupes ternaires correspond à une démarche affine qui utilise une loi ternaire sur un ensemble muni d'une loi binaire, d'une loi unaire et d'un élément distingué ; enfin dans [2] nous avons effectué une démarche affine sur un treillis en utilisant une loi ternaire (bien différente de la précédente)... Voilà pourquoi nous pensons qu'une vaste perspective de recherche est offerte par la notion même de démarche affine.

Références pour la Conclusion

1 A. Batbedat : Préalgèbres ternaires.

2 A. Batbedat : Démarche affine sur un treillis. Séminaire du Centre d'Informatique, Faculté des Sciences de Montpellier (1974).

3 I. Créangă : Sur les algèbres ternaires. Ann. Sti. Univ. Al. I. Cuza Iasi (1970).

4 M.R. Hestenes : A ternary algebra with applications to matrices and linear transformations. Arch. Rat. Mech. and Analysis 11 (1962).

5 W.G. Lister : Ternary rings. Trans. Amer. Mat. Soc. 154 (1971).

6 P. Zvengrowski : A 3-fold vector product in R^8. Commentarii Matématici Helvétici. Vol. 40 (1965).

Nous avons présenté en VII. 9 la catégorie des Ω-espaces affines classiques (pour Ω fixé). En faisant varier Ω on se place dans la catégorie des espaces affines classiques qui est équivalente à A définie dans les notations ci-après. Nous allons démontrer ici qu'elle est équivalente à une certaine catégorie (B) de préanneaux.

Notations :

A est la catégorie suivante : Un objet est un couple (Ω, E) où Ω est un anneau associatif de zéro ω et de neutre 1 et E un strict Ω-espace affine (III. 1). Un morphisme est un couple (ϕ, ψ) où ϕ est un morphisme d'anneaux unitaires et ψ une application de source E telle que pour tous a, b, c de E , α de Ω :

$$((a, b, \alpha, c))\psi = ((a)\psi, (b)\psi, (\alpha)\phi, (c)\psi) .$$

B est la catégorie suivante : Préanneaux associatifs unitaires avec des zéros à droite.

On note ρ un morphisme de B, F un objet et P l'ensemble des zéros à droite de F. Lorsqu'il s'agit d'un préanneau F, les éléments r, s, u sont quelconques alors que a, b, c, h, k, x sont dans P.

Remarque : P est l'ensemble des k u pour k fixé dans P ; il en résulte qu'une application de F dans F' qui respecte le produit et un zéro à droite, les respecte tous : ainsi un morphisme de B peut être défini comme un morphisme de préanneaux unitaires qui respecte un zéro à droite.

La Proposition 2 de XI. 9 permet de définir un foncteur naturel $\mathcal{D}$ de A vers B : à l'objet (Ω, E) , $\mathcal{D}$ associe le préanneau W des dilatations de E (qui est un objet de B) et au morphisme (ϕ, ψ) , $\mathcal{D}$ associe le morphisme θ de B source W défini comme suit : à la dilatation : $x \to (x, k, \alpha, a)$, θ fait correspondre : $x' \to (x', (k)\psi, (\alpha)\phi, (a)\psi)$. Nous appelons $\mathcal{D}$ le foncteur dilatant.

Soit Ω_1 le quotient de Ω par Ann(E) (III. 9) : E est un strict Ω_1-espace affine fidèle (III. 9, Lemme 2) et, par le foncteur dilatant, (Ω, E) et (Ω_1, E) ont même image. Ainsi il est préférable de restreindre le foncteur dilatant à la sous-catégorie pleine de A des espaces affines fidèles que nous notons C.

Soit F un objet de B : P est un idéal bilatère (X. 5) donc $F/_P = K$ est un anneau associatif unitaire (VI. 5, Proposition et Théorème) ; de plus, l'opération : a r - b r + c, permet de définir canoniquement une opération affine sur P à partir de l'anneau K, notée (a, b, α, c), avec α image de r dans K. On détermine un foncteur $\mathcal{C}$ de B vers A en associant l'objet (K, P) à F et le morphisme (λ, μ) au morphisme ρ où μ est la restriction de ρ à P et λ le morphisme d'anneaux unitaires de source K induit par ρ. Nous appelons $\mathcal{C}$ le foncteur contractant.

On considère l'ensemble V des applications $d_r : u \in F \to u\,r \in F$, pour r parcourant F ; V est un sous-préanneau du préanneau des endomorphismes du strict groupe ternaire F et (F étant unitaire) l'application : $r \in F \to d_r \in V$ est un isomorphisme qui permet d'identifier V et F.

On dit que P est attractif si pour tout $r \in F$, la propriété : " d_r est constante sur P ", implique $r \in P$.

Soit U l'ensemble des applications de P dans P qui sont des restrictions d'éléments de V.

Lemme 1 : P est attractif si et seulement si $U = V$.

Preuve : Si $U = V$, les seuls éléments de U constants sur P sont les éléments d_k de V.

Si P est attractif, $d_r = d_s$ sur P implique : r - s + a = b ; mais de x r = x s résulte a = b, donc r = s.

Nous notons D la sous-catégorie pleine de B des objets F pour lesquels P est attractif.

Lemme 2 : L'image d'un objet de D par le foncteur contractant est dans C et l'image d'un objet de C par le foncteur dilatant est dans D.

Preuve : Si dans F, x r - k r + k = k pour tout $x \in P$, d_r est constante sur P ; P étant attractif, $\alpha = \omega$ dans K.

Dans le préanneau W des dilatations de E, l'ensemble des zéros à droite est attractif.

Théorème 1 : Les catégories C et D sont équivalentes.

Preuve : Partons de (Ω, E) auquel le foncteur dilatant associe W : E s'identifie canoniquement à l'ensemble des zéros à droite de W. Comme E est fidèle, chaque dilatation a un unique rapport et deux dilatations sont équivalentes modulo E si et seulement si elles ont même rapport ; ainsi on peut identifier Ω et $W/_E$. Il est immédiat que pour les morphismes $\mathcal{D}$ puis $\mathcal{C}$ est l'identité.
Partons de F auquel le foncteur contractant associe (K, P) et soit W le préanneau des dilatations de (K, P) : U est contenu dans W car $x\,r = x\,r - k\,r + k\,r = (x, k, \alpha, a)$ avec α image de r dans K et $a = k\,r$; W est contenu dans U car (x, k, β, b) s'écrit : $x\,s - k\,s + b$ dans F, soit $x\,(s - k\,s + b)$; donc $U = W$. Comme P est attractif $W = V$ est canoniquement identifié à F. La démonstration montre que d_r est la dilatation : $x \to (x, k, \alpha, a)$ si et seulement si : $r = s - k\,s + a$ avec s dans la préimage de α ; ceci étant, au morphisme ρ, le foncteur $\mathcal{C}$ associe (λ, μ) auquel le foncteur $\mathcal{D}$ fait correspondre θ tel que : $(d_r)\,\theta = d_{(r)\rho}$: W étant identifié à F , $\mathcal{C}$ puis $\mathcal{D}$ est l'identité.

Remarques
i) Soit E un strict groupe ternaire et H le préanneau des endomorphismes de E. S'il existe Ω pour lequel E est un strict Ω-espace affine fidèle, W est un sous-préanneau unitaire de H contenant E (c'est-à-dire les zéros à droite de H). Réciproquement, si H' est un sous-préanneau unitaire de H contenant E, par le foncteur $\mathcal{C}$, E est un strict $H'/_E$-espace affine fidèle.
ii) Soit (Ω, E) un objet de C : pour chaque $k \in E$ l'ensemble des homothéties de centre k est un sous-anneau unitaire de W ; cet anneau est isomorphe à $K = W/_E$.

La réciprocité des foncteurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ n'a été établie qu'entre C et D car entre A et B le foncteur dilatant n'est pas essentiellement surjectif (les objets de B qui en sont images possèdent nécessairement un ensemble attractif de zéros à droite).
Par contre, en n'utilisant que le foncteur contractant, nous allons prouver :

Théorème 2 : Les catégories A et B sont équivalentes.

Preuve : Soit E un strict Ω-espace affine et $k \in E$: par XIII. 5, Proposition 2, le strict groupe ternaire produit $\Omega \times E$, muni de la loi binaire : $(\alpha, a)\ (\beta, b) = (\alpha\ \beta, (a, k, \beta, b))$, est un préanneau associatif de neutre $(1, k)$ et avec l'ensemble de zéros à droite $\{(w, a)\}$ qui peut être identifié à E ; d'autre part, $K = \mathcal{G}/_E$ peut être identifé à Ω : ainsi le foncteur $\mathcal{G}$ est essentiellement surjectif.

Nous allons montrer qu'il est aussi plein et fidèle (X. 2). Soit F un objet de B et k un zéro à droite de F : par XIII. 5, Théorème 2, F est identifié au strict groupe ternaire $Q \times P$ avec la même loi binaire que ci-dessus, où $Q = \{k \vee u\}$ peut être identifié à $K = F/_P$. Ceci étant, soit deux objets F et F', leurs images (K, P), (K', P') par $\mathcal{G}$ et k fixé dans P. Si ρ est un morphisme de F vers F' avec $(k)\rho = k'$, l'image de Q est dans Q' et la restriction de ρ à Q peut être identifié à λ. Si (ϕ, ψ) est un morphisme de (K, P) vers (K', P') avec $(k)\psi = k'$, l'application $(\alpha, a) \in Q \times P \rightarrow ((\alpha)\ \phi, (a)\ \psi) \in Q' \times P'$ est un morphisme de F vers F'. Enfin, pour chaque $k' \in P'$ cette correspondance est biunivoque.

Corollaire 1 : La catégorie des espaces affines classiques est équivalente à la catégorie des anneaux associatifs avec des neutres à droite.

Corollaire 2 : La catégorie des modules est équivalente à la catégorie des préanneaux associatifs unitaires pointés sur un zéro à droite ou encore à la catégorie des anneaux associatifs pointés sur un neutre à droite.

Le premier s'obtient par dualité pour la disjonction et le second en pointant.

Remarques

i) Le Corollaire 1 a surtout un intérêt théorique car c'est l'aspect préanneau et non l'aspect anneau qui donne des opérations canoniques.

ii) La démonstration directe du Corollaire 2 se fait comme pour le théorème 2 (mais avec des objets pointés) en utilisant les résultats de XIII. 5. L'hypothès unitaire ne jouant qu'un rôle secondaire, on peut aussi établir que la catégorie des pseudo-modules est équivalente à la catégorie des préanneaux associatifs pointés sur un zéro à droite. Ces préanneaux étant généralement non unitaires, o ne peut plus, par dualité pour la disjonction, se ramener à des anneaux.

Dans l'équivalence du théorème 2, la catégorie des stricts espaces affines fidèles (hypothèse qui n'est pas très restrictive) correspond à la catégorie des préanneaux associatifs unitaires avec un ensemble attractif de zéros à droite et la démonstration du théorème 1 a montré que dans ce cas le foncteur dilatant est réciproque du foncteur contractant. Ceci permet de préciser d'autres cas particuliers importants (dans un sens les résultats proviennent de XI. 9, Proposition 3).

Théorème 3 : La catégorie des stricts espaces affines fidèles de caractéristique n est équivalente à la catégorie des préanneaux associatifs unitaires de caractéristique n avec un ensemble attractif de zéros à droite.

Théorème 4 : La catégorie des stricts espaces affines sans torsion est équivalente à la catégorie des préanneaux associatifs unitaires avec des zéros à droite et simplifiables (propriété vérifiée par tout élément autre qu'un zéro à droite).

Théorème 5 : La catégorie des espaces affines classiques à partir d'un corps est équivalente à la catégorie des précorps associatifs unitaires avec des zéros à droite.

Remarques

i) Si F est simplifiable à droite, le strict K-espace affine P est sans torsion donc F est simplifiable (théorème 4).

ii) Si F est simplifiable à droite et fini, K est un corps fini donc commutatif et P pointé en k est un K-espace vectoriel de dimension n. K a p^m éléments (avec p premier), P a p^{mn} éléments et F $p^{m(n+1)}$ éléments : F est construit sur K^{n+1} avec des opérations que l'on déduit facilement de XIII. 5.

Alors que dans la catégorie des espaces affines classiques les objets et les morphismes sont des triplets, les résultats précédents permettent de n'utiliser qu'un seul ensemble pour les objets et une seule application pour les morphismes. Ainsi, outre l'importance mathématique de l'équivalence présentée, nous devons remarquer son intérêt pratique.

Les recherches sur les préanneaux trouvent une justification éclatante dans cette équivalence fondamentale.

SOMMAIRE

AVANT PROPOS

INTRODUCTION

CHAPITRE I : TERNAIRES

CHAPITRE II : CONTRE-GROUPES TERNAIRES A OPERATEUR

CHAPITRE III : Ω-ESPACES AFFINES A OPERATEUR

CHAPITRE IV : UN FONCTEUR UNIVERSEL

CHAPITRE V : CARACTERISTIQUE

CHAPITRE VI : SOUS-ESPACES ; NOYAUX ; MORPHISMES

CHAPITRE VII : ESPACES PONDERES ET GEOMETRIE AFFINE

CHAPITRE VIII : DE LA GEOMETRIE A L'ALGEBRE PAR LA METHODE D'ARTIN

CHAPITRE IX : BINAIRES

CHAPITRE X : GENERALITES SUR LES PREALGEBRES

CHAPITRE XI : D'AUTRES PROPRIETES DES PREALGEBRES

CHAPITRE XII : STRUCTURES PREMODULAIRES

CHAPITRE XIII : PREALGEBRES CONTENANT UN IDEMPOTENT

CHAPITRE XIV : PREANNEAUX D'ORDRE n

CONCLUSION

EQUIVALENCE FONDAMENTALE

SOMMAIRE